

# Übungsblatt 5

M. Ladecký, L. Pastewka

2025-11-12

Abgabe bis 19. November 2025, 14:00 als [Jupyter Notebook](#) via ILIAS.

Aufgabe P5 (20 Punkte)



Abbildung 1: Luchs vs Hase

Wir betrachten zwei Populationen: die Hasen  $H(t)$  und die Luchse  $L(t)$ .

Die Hasen vermehren sich mit einer Rate von 1 pro Zeiteinheit, da wir annehmen, dass sie über eine unerschöpfliche Nahrungsquelle verfügen.

Die Luchse hingegen sterben mit einer Rate von 3 pro Zeiteinheit, wenn sie keine Hasen als Beute finden. Treffen Luchse auf Hasen, erhöht sich ihre Wachstumsrate um  $\frac{1}{20}$  pro Zeiteinheit und pro Hase. Das bedeutet: Je mehr Hasen vorhanden sind, desto besser können sich die Luchse ernähren und fortpflanzen.

Für die Hasen wirkt sich die Begegnung mit einem Luchs negativ aus: Ihre Population nimmt um  $\frac{1}{6}$  pro Zeiteinheit und pro Luchs ab, weil ein Teil der Hasen gefressen wird. Ein Hase hat somit eine Überlebenschance von  $\frac{5}{6}$  pro Begegnung.

Wir können die Hasen- und Luchspopulation durch gekoppelte DGLs modellieren.

1. Stellen Sie ein System von gekoppelten Differentialgleichungen erster Ordnung für das Modell auf.
2. Zu Beginn leben 3 Luchse und 50 Hasen. Lösen Sie dieses System mittels `scipy.solve_ivp`.
3. Stellen Sie den Verlauf der Hasen-, sowie der Luchspopulation über der Zeit mittels `matplotlib` in einem Plot grafisch dar.
4. Stellen Sie die Hasen über die Luchspopulation als Phasenraumkurve dar.
5. Erstellen Sie einen Phasenraumplot mithilfe von `quiver` und plotten Sie die Trajektorie mit ihren gewählten Anfangsbedingungen in diesen Plot. Wählen Sie hierfür sinnvolle Bereiche auf den Achsen.
6. Bestimmen Sie die Gleichgewichtspunkte, in denen sich weder Luchs noch Hasenpopulation über Zeit ändern. Zeichnen Sie diesen in den Phasenraumplot ein.
7. Zur Verifikation berechnen Sie mit den berechneten stationären Werten von H und L als Anfangswerte die Trajektorie mittels `scipy.solve_ivp`.

*Hinweis: Die Gleichgewichtspunkte finden Sie aus dem Differentialgleichungssystem, indem Sie die zeitlichen Veränderungen auf 0 setzen.*