Übungsblatt 10

M. Ladecký, L. Pastewka

2025-12-17

Abgabe bis 07. Januar 2025, 14:00 als Jupyter Notebook via ILIAS.

Analytische Aufgaben

Aufgabe A10 (2+2 Punkte): Herleitung der Übertragungsfunktion eines Tiefpasses

Betrachten Sie einen nicht belasteten Tiefpass mit folgender Schaltung:

U_e beschreibt die Eingangsspannung, R den Widerstand, C die Kapazität des Kondensators und U_a die Ausgangsspannung.

Leiten Sie her:

1. **Im Zeitbereich:** Die Spannungs-Strom-Beziehung für den Widerstand lautet $U_R(t) = RI(t)$, und für den Kondensator $\dot{U}_C(t) = \frac{I(t)}{C}$ (im unbelasteten Fall). Beschreiben Sie die Beziehung zwischen Eingangsspannung $U_e(t)$ und Ausgangsspannung $U_a(t)$ als Differentialgleichung.

Hinweis: Sie können entweder die Lagrange-Methode oder das 2. Kirchhoffsche Gesetz (auch Maschenregel genannt) verwenden. Die Ergebnisse sollten identisch sein.

2. **Im Frequenzbereich:** Leiten Sie die Fouriertransformation der Differentialgleichung aus Teil 1 ab, um die Beziehung im Frequenzbereich zu erhalten. Bestimmen Sie die *Übertragungsfunktion* $G(\omega)$ mit

$$\tilde{U}_a(\omega) = G(\omega)\tilde{U}_e(\omega).$$

   Das Ergebnis dieser analytischen Aufgabe wird in der Programmieraufgabe benötigt.

Hinweis: Die Fourier-Transformation einer Zeitableitung ist $\mathcal{F}\{\dot{u}(t)\} = i\omega\tilde{u}(\omega)$.

Programmieraufgaben

Aufgabe P10 (2+2+3+3+3+3 Punkte): Numerische Simulation eines Tiefpasses.

Setzen Sie $RC = 0.1$ s. Verwenden Sie die periodische Eingangsspannung $U_e(t) = \sin(2\pi\gamma t)$ V. Betrachten Sie vier Frequenzen: $\gamma = 1, 10, 100, 1000$ Hz.

1. Lösen Sie die Differentialgleichung aus A10.1 mit `scipy.solve_ivp` und Anfangswerte $U_e(0)$. Stellen Sie die Eingangsspannungen $U_e(t)$ und die Ausgangsspannungen $U_a(t)$ als Funktion der Zeit grafisch dar.
2. Berechnen Sie die fouriertransformatierte Eingangsspannungen $\tilde{U}_e(\omega)$. Verwenden Sie die in Aufgabe A10.2 hergeleitete Übertragungsfunktion $G(\omega)$, um die fouriertransformatierte Ausgangsspannungen $\tilde{U}_a(\omega)$ zu erhalten. Stellen Sie die Eingangsspannungen $\tilde{U}_e(\omega)$ und die Ausgangsspannungen $\tilde{U}_a(\omega)$ als Funktion der Frequenz grafisch dar.

Hinweis: Verwenden Sie das Modul `numpy.fft`. Die Funktionen `fft`, `ifft`,`fftfreq` und `fftshift` sollten hilfreich sein.

3. Wenden Sie die Fourier-Rücktransformation auf $\tilde{U}_e(\omega)$ und $\tilde{U}_a(\omega)$ an. Stellen Sie die Ergebisse gegen $U_e(t)$ und $U_a(t)$ aus Aufgabe P10.1 grafisch dar.
4. Wenden Sie die Fourier-Transformation auf $U_e(t)$ und $U_a(t)$ an. Stellen Sie die Ergebisse gegen $\tilde{U}_e(\omega)$ und $\tilde{U}_a(\omega)$ aus Aufgabe P10.2 grafisch dar.
5. Stellen Sie den Betrag der in Aufgabe A10.2 hergeleiteten Übertragungsfunktion $|G(\omega)|$ als Funktion der Frequenz grafisch dar.
6. Messen Sie die Amplitude der Ausgangsspannung $U_a(t)$ im stationären Zustand (nach ausreichend langer Zeit t). Tragen Sie diesen Wert in dieselbe Grafik wie in Aufgabe P10.5 ein.