Übungsblatt 12

M. Ladecký, L. Pastewka

2026-01-14

Abgabe bis 21. Januar 2026, 14:00 als Jupyter Notebook via ILIAS.

Dieses Blatt widmet sich numerischen Verfahren zum Lösen von AWPs.

Hierfür betrachten wir das **explizite Euler Verfahren** und lösen eine DGL erster Ordnung numerisch. Natürlich gibt es es genauere und bessere Verfahren, wir wollen aber eine möglichst einfache Implementierung und wählen daher dieses. Zum Vergleich nehmen wir die Methoden aus `solve_ivp`.

Aufgabe P12 (20 Punkte)

Wir lösen und erweitern nun das im Tutorat vorgestellte SIR-Modell.

$$\dot{S}(t) = -\beta S(t) \cdot \frac{I(t)}{N(t)}$$

$$\dot{I}(t) = \beta S(t) \cdot \frac{I(t)}{N(t)} - \gamma I(t)$$

$$\dot{R}(t) = \gamma I(t)$$

Gehen Sie davon aus, dass die Population am Anfang ($t = 0$) nur aus suszeptiblen und infizierten Individuen bestehe: $N(0) = 10^4$, $I(0) = 10^2$, $R(0) = 0$ und $S(0) = N(0) - I(0)$. $\beta = 1.0$ ist die Infektionsrate pro infizierter Person, $\gamma = 0.1$ ist die Genesungsrate. Damit liegt eine hohe Reproduktionszahl $R_0 = 10$ vor. R_0 beschreibt die Zahl der von einer infizierten Person angesteckten Populationsmitglieder. Sie berechnet sich aus dem Verhältnis der Infektionsrate β zur Rate der aus der infizierten Population entfernten Individuen, also in unserem Fall $R_0 = \beta/\gamma$. **Vorsicht!** Dies ändert sich aber, wenn wir das Modell erweitern.

a) Lösen Sie das System von DGLs mit dem expliziten Euler-Verfahren und mittels `solve_ivp` numerisch im Zeitintervall $0 < t < 100$. Benutzen Sie für die Eulermethode 1001 Stützstellen im Intervall $0 < t < 100$, also eine Zeitschritt von $dt = 0.1$

b) Zeichnen Sie die Lösungen für S, I und R in einem Graphen und die Differenzen der Lösungen beider Methode in einem weiteren Graphen. Achten Sie hier auf eine übersichtliche Darstellung.

c) Bauen Sie nun eine weitere Größe $D(t)$ ein. Diese soll die Anzahl der an der Pandemie verstorbenen Menschen sein. Wir nehmen eine Letalität von 1% an. Lösen Sie dieses System von DGLs ebenfalls mit Ihrer Euler-Implementation und stellen Sie dieses ebenfalls als Plot dar (Zeitraum $0 \leq t \leq 100$).

d) Nach 5 Tagen gebe es nun ein Medikament, das bewirke, dass die Infizierten nur noch halb so ansteckend sind. Modellieren Sie auch dies und stellen Sie in einem weiteren Plot auch diesen Verlauf im gleichen Zeitraum dar. Benutzen Sie hierbei wieder Ihre Euler-Implementierung.