

# Probeklausur Differentialgleichungen WS2026

M. Ladecký, L. Pastewka

2026-01-28

Abgabe bis 04. Februar 2026, 14:00 als [Jupyter Notebook](#) via ILIAS.

## Probeklausur für den Kurs Differentialgleichungen

- Zu bearbeiten sind alle Aufgaben. **Bearbeitungszeit 180 Minuten.**
- Hilfsmittel: Dies ist eine Open-Book-Klausur. Sie dürfen alle mitgebrachten nichtelektronischen Texte verwenden. Genereller Internetzugang ist gesperrt.

---

Punkte 1	Punkte 2	Punkte 3	Punkte 4	Punkte 5	Punkte ges.	Note
(von 6)	(von 18)	(von 15)	(von 19)	(von 12)	(von 70)	

---

### Aufgabe 1: Verständnisfragen (8 Punkte)

1. Schreiben Sie die Homogenitätsbedingung für lineare Differentialgleichungen nieder. (2 Punkte)
2. Gegeben die DGL  $\frac{dy}{dx} = xy^2$ . (3 Punkte)
  - Ist die Gleichung linear oder nichtlinear?
  - Geben Sie die allgemeine Lösung  $y(x)$  an.
3. Gegeben seien zwei gekoppelte Differentialgleichungen dritter Ordnung. Wie viele Anfangsbedingungen müssen gegeben sein, damit der Anfangszustand des Systems eindeutig bestimmt ist? (1 Punkt)

## Aufgabe 2: Lagrange Methode (18 Punkte)

### Elektromechanischer Schwingkreis

Gegeben sei der elektromechanische Schwingkreis wie in der Abbildung dargestellt. Er besteht aus zwei Massen, die an eine variable Induktivität und eine variable Kapazität, sowie an Federn und Dämpfer gekoppelt sind.

Die Bewegung der Masse  $m_1$  erzeugt eine veränderliche Induktivität  $L(x_1)$ . Die Bewegung der Masse  $m_2$  erzeugt eine veränderliche Kapazität  $C(x_2)$ .

**Hinweis:** Am elektrischen Schaltkreis liege die Spannung  $U(t)$  an.

1. Stellen Sie die Lagrangefunktion des Gesamtsystems auf. (7 Punkte)
2. Stellen Sie die Dissipationsfunktion auf. (3 Punkte)
3. Leiten Sie die Bewegungsgleichungen ab. (8 Punkte)

## Aufgabe 3: Nichtlinearer Oszillator (15 Punkte)

### Oszillator mit Tunnelodiode

Gegeben ein Schwingkreis mit einer Tunnelodiode als nichtlineares Element.

Die Kennlinie der Tunnelodiode sei:

$$I_T(U) = 2U^3 - U^2 + 0.13U$$

und die Bilanzgleichungen für Strom und Spannung lauten:

$$C\dot{U}(t) = I(t) - I_T(U(t)) \quad (1)$$

$$L\dot{I}(t) = U_{in}(t) - RI(t) - U(t) \quad (2)$$

1. Stellen Sie die zwei Bewegungsgleichungen auf, eine für den Gesamtstrom  $I$  im Schaltkreis und eine für den Spannungsabfall über der Tunnelodiode  $U$  als abhängige Variable. (6 Punkte)
2. Es seien  $R = 10 \Omega$ ,  $C = 10^{-4} F$ ,  $L = 0.1 H$ ,  $U_{in} = 0.22 V$ . Die Anfangswerte seien gegeben als  $U_T(0) = 1/6$  und  $I(0) = I_T(1/6)$ . Lösen Sie das gekoppelte Gleichungssystem und stellen Sie  $U(t)$  und  $I(t)$  jeweils in einem Graphen im Intervall  $t \in [0, 0.1]$  mit 1000 Evaluationspunkten dar. (6 Punkte)
3. Zeichnen Sie für die Lösungen einen Phasenraumgraphen, indem Sie  $I(t)$  über  $U(t)$  auftragen. (3 Punkte)

```

# Aufgabe 3.2 und 3.3: Lösung hier implementieren
import numpy as np
import matplotlib.pyplot as plt
from scipy.integrate import solve_ivp

# Parameter
R = 10      # Ohm
C = 1e-4    # F
L = 0.1     # H
U_in = 0.22 # V

# Kennlinie der Tunnelodiode
def I_T(U):
    return 2*U**3 - U**2 + 0.13*U

# Ihre Lösung hier...

```

## Aufgabe 4: Gekoppelte Gleichungen (19 Punkte)

### SIR-Modell

Es sei eine Variante des SIR-Modells zur Beschreibung des zeitlichen Verlaufs einer Pandemie gegeben:

$$\dot{S}(t) = -\beta S(t) \frac{I(t)}{N(t)} - \mu S(t) + \kappa R(t) \quad (3)$$

$$\dot{I}(t) = \beta S(t) \frac{I(t)}{N(t)} - \nu I(t) + \gamma R(t) \quad (4)$$

$$\dot{R}(t) = \nu I(t) + \mu S(t) - (\gamma + \kappa) R(t) \quad (5)$$

Wobei  $S(t)$  *suszeptible individuals*,  $I(t)$  *infected individuals*,  $R(t)$  *resistant individuals* bedeutet und es ist  $N = S + I + R$  die Gesamtpopulation.

- $\beta$  sei die Rate mit der sich ein Mitglied der suszeptiblen Population infiziert.
  - $\nu$  sei die Gesundungsrate und  $\mu$  sei die Impfrate.
1. Interpretieren Sie dieses Modell und zeigen Sie eventuelle Schwächen auf. Interpretieren Sie insbesondere die Parameter  $\gamma$  und  $\kappa$ . (6 Punkte)
  2. Schreiben Sie ein Pythonprogramm und lösen Sie die gekoppelten Differentialgleichungen für den Parametersatz  $\beta = 0.1$ ,  $\nu = 0.05$ ,  $\gamma = 0.01$ ,  $\kappa = 0.05$  und einmal mit  $\mu = 0.0$  sowie ein zweites Mal mit  $\mu = 0.1$ , mit den Anfangsbedingungen  $N(0) = 10000$ ,  $I(0) = 100$  und  $R(0) = 0$ . (7 Punkte)

3. Stellen Sie den Verlauf der zwei numerischen Lösungen für  $S(t)$ ,  $I(t)$  und  $R(t)$  jeweils in einem Graphen im Intervall  $t \in [0, 100]$  dar. Was ist der Einfluss von  $\mu$ ? (6 Punkte)

```
# Aufgabe 4.2 und 4.3: Lösung hier implementieren
import numpy as np
import matplotlib.pyplot as plt
from scipy.integrate import solve_ivp

# Parameter
beta = 0.1
nu = 0.05
gamma = 0.01
kappa = 0.05

# Anfangsbedingungen
NO = 10000
IO = 100
RO = 0
SO = NO - IO - RO

# Ihre Lösung hier...
```

### Aufgabe 5: Das kubische Waschbecken (12 Punkte)

#### Toricelli'sche Ausflussformel

Gegeben sei ein kubisches Becken mit Kantenlänge  $d$ . Zu Beginn sei das Becken bis zur Hälfte mit Flüssigkeit gefüllt, d.h.  $y(0) = \frac{d}{2}$ . Nach dem Öffnen des Abflaufs am Punkt  $(0, 0)$  fließe die Flüssigkeit gemäß der Torricelli'schen Ausflussformel aus dem Becken.

D.h. die zeitliche Veränderung des Flüssigkeitsvolumens  $V$  im Becken ist:

$$\frac{dV}{dt} = -k\sqrt{y}$$

1. Wie groß ist die differentielle Volumenänderung  $dV$ , bei einer differentiellen Änderung  $dy$  des Flüssigkeitspegels? (4 Punkte)
2. Stellen Sie eine Differentialgleichung für die zeitliche Änderung von  $y(t)$  auf. (4 Punkte)
3. Lösen Sie die Differentialgleichung numerisch für  $y(0) = d/2 = 0.5$ ,  $d = 1$  und  $k = 1$  und stellen den zeitlichen Verlauf von  $y(t)$  grafisch dar. (4 Punkte)

```
# Aufgabe 5.3: Lösung hier implementieren
import numpy as np
import matplotlib.pyplot as plt
from scipy.integrate import solve_ivp

# Parameter
d = 1
k = 1
y0 = d / 2

# Ihre Lösung hier...
```