

Konzepte

i Lernziele

Die Studierenden sollen...

- ... das Richtungsfeld einer Differentialgleichung erster Ordnung interpretieren können.
- ... die Methode der Separation der Variablen auf separierbare Differentialgleichungen anwenden können.
- ... lineare Differentialgleichungen erster Ordnung mit der Methode des integrierenden Faktors lösen können.

Differentialgleichungen erster Ordnung

Eine gewöhnliche Differentialgleichung erster Ordnung stellt eine Beziehung zwischen einer gesuchten Funktion und ihrer ersten Ableitung her. Die allgemeine Form lautet:

$$\frac{dy}{dx} = f(x, y) \quad (1)$$

Hierbei bezeichnet $y(x)$ die gesuchte Funktion, während $f(x, y)$ eine gegebene Funktion der unabhängigen Variablen x und der abhängigen Variablen y ist. Diese einfache Form verbirgt eine bemerkenswerte Vielfalt an Phänomenen, die sich mit Differentialgleichungen erster Ordnung beschreiben lassen.

Die Lösung einer solchen Differentialgleichung ist eine Funktion $y(x)$, die beim Einsetzen in die Gleichung diese identisch erfüllt. Da bei der Integration eine Konstante auftritt, existiert im Allgemeinen nicht nur eine einzelne Lösung, sondern eine ganze Familie von Lösungen. Diese Familie nennt man die allgemeine Lösung, und sie enthält eine freie Integrationskonstante.

Um aus der Familie aller Lösungen eine konkrete Lösung auszuwählen, benötigt man zusätzliche Information. Diese wird üblicherweise durch eine Anfangsbedingung der Form $y(x_0) = y_0$

bereitgestellt. Die Aufgabe, eine Differentialgleichung zusammen mit einer Anfangsbedingung zu lösen, bezeichnet man als Anfangswertproblem.

Das Richtungsfeld

Jede Differentialgleichung erster Ordnung lässt sich geometrisch interpretieren. An jedem Punkt (x, y) in der Ebene gibt die Funktion $f(x, y)$ die Steigung der Lösungskurve an, die durch diesen Punkt verläuft. Man kann sich vorstellen, dass die Differentialgleichung an jedem Punkt der Ebene einen kleinen Richtungspfeil anbringt, dessen Steigung durch $f(x, y)$ gegeben ist.

Diese Gesamtheit aller Richtungspfeile nennt man das Richtungsfeld der Differentialgleichung. Eine Lösungskurve ist dann eine Kurve, deren Tangente an jedem Punkt mit dem dort vorgegebenen Richtungspfeil übereinstimmt. Die Lösungskurve folgt gewissermaßen dem durch die Differentialgleichung vorgegebenen Strömungsfeld.

Das Richtungsfeld erlaubt oft schon eine qualitative Vorstellung vom Verhalten der Lösungen, auch wenn eine explizite analytische Lösung nicht bekannt ist. Insbesondere kann man erkennen, ob Lösungen wachsen oder fallen, ob sie gegen bestimmte Werte streben oder ob sie oszillieren.

Separation der Variablen

Die Methode der Trennung der Variablen ist die einfachste und direkteste Lösungsmethode für Differentialgleichungen erster Ordnung. Sie funktioniert allerdings nur für eine spezielle Klasse von Gleichungen, bei denen sich die rechte Seite als Produkt zweier Funktionen schreiben lässt.

Eine Differentialgleichung heißt separabel, wenn sie die Form

$$\frac{dy}{dx} = g(x)h(y) \quad (2)$$

besitzt. Hier hängt die Funktion g nur von x ab, während h nur von y abhängt. Die Funktion $f(x, y)$ faktorisiert also vollständig in ein Produkt.

Die grundlegende Idee der Separation besteht darin, alle Terme mit y auf die linke Seite und alle Terme mit x auf die rechte Seite zu bringen. Man behandelt die Differentiale formal wie algebraische Größen und schreibt:

$$\frac{1}{h(y)} dy = g(x) dx \quad (3)$$

Nun können beide Seiten unabhängig voneinander integriert werden:

$$\int \frac{1}{h(y)} dy = \int g(x) dx + C \quad (4)$$

Die Integrationskonstante C tritt nur auf einer Seite auf, da die Differenz zweier Konstanten wieder eine Konstante ist. Nach Ausführung der Integrationen erhält man eine implizite oder explizite Gleichung für $y(x)$. Falls möglich, löst man diese Gleichung nach y auf, um die Lösung in expliziter Form zu erhalten.

Die Methode der Separation ist besonders elegant, weil sie die Differentialgleichung auf zwei gewöhnliche Integrale zurückführt. Allerdings ist nicht jede Differentialgleichung separabel. Wenn sich die rechte Seite nicht als Produkt $g(x)h(y)$ schreiben lässt, muss man auf andere Methoden zurückgreifen.

Anwendungsbereich und Grenzen

Die Anwendbarkeit der Separationsmethode ist durch die spezielle Produktform der rechten Seite eingeschränkt. Eine Differentialgleichung wie $y' = x + y$ lässt sich nicht separieren, da $x + y$ kein Produkt ist. Ebenso wenig funktioniert die Methode für $y' = x^2 + y^2$ oder andere Gleichungen, bei denen x und y additiv oder auf komplexere Weise verknüpft sind.

Selbst wenn eine Gleichung separabel ist, können die auftretenden Integrale möglicherweise nicht in geschlossener Form ausgewertet werden. In solchen Fällen erhält man zwar eine formale Lösung, aber keine explizite Darstellung als elementare Funktion. Dennoch ist auch die implizite Form der Lösung oft nützlich für qualitative Aussagen oder numerische Berechnungen.

Ein weiterer subtiler Punkt betrifft mögliche Nullstellen der Funktion $h(y)$. An Stellen, wo $h(y) = 0$ gilt, ist die Division durch $h(y)$ nicht erlaubt. Solche Werte definieren oft konstante Lösungen der Differentialgleichung, die bei der Separation verloren gehen können und gesondert untersucht werden müssen.

Lineare Differentialgleichungen erster Ordnung

Eine besonders wichtige Klasse von Differentialgleichungen erster Ordnung bilden die linearen Gleichungen. Eine lineare Differentialgleichung erster Ordnung hat die Standardform:

$$\frac{dy}{dx} + p(x)y = q(x) \quad (5)$$

Das charakteristische Merkmal einer linearen Gleichung ist, dass die gesuchte Funktion y und ihre Ableitung y' nur in der ersten Potenz auftreten. Es gibt keine Terme wie y^2 , $\sin(y)$ oder

$(y')^2$. Die Koeffizientenfunktion $p(x)$ und die rechte Seite $q(x)$ dürfen beliebige Funktionen von x sein, aber sie dürfen nicht von y abhängen.

Man unterscheidet zwischen homogenen und inhomogenen linearen Gleichungen. Die homogene Gleichung erhält man, wenn die rechte Seite verschwindet, also $q(x) = 0$. In diesem Fall lautet die Gleichung:

$$\frac{dy}{dx} + p(x)y = 0 \quad (6)$$

Die homogene Gleichung ist separabel und lässt sich durch Trennung der Variablen lösen. Die inhomogene Gleichung mit $q(x) \neq 0$ erfordert dagegen eine spezielle Lösungsmethode.

Die Methode des integrierenden Faktors

Die Methode des integrierenden Faktors ist eine systematische Technik zur Lösung linearer Differentialgleichungen erster Ordnung. Die Grundidee besteht darin, die Gleichung mit einer geschickt gewählten Funktion zu multiplizieren, sodass die linke Seite als vollständige Ableitung eines Produkts geschrieben werden kann.

Der integrierende Faktor ist eine Funktion $\mu(x)$, die so gewählt wird, dass nach Multiplikation mit $\mu(x)$ die linke Seite der Gleichung die Form einer Produktableitung annimmt. Konkret suchen wir $\mu(x)$ so, dass:

$$\mu(x)\frac{dy}{dx} + \mu(x)p(x)y = \frac{d}{dx}[\mu(x)y] \quad (7)$$

Die Produktregel der Differentiation liefert:

$$\frac{d}{dx}[\mu(x)y] = \mu'(x)y + \mu(x)\frac{dy}{dx} \quad (8)$$

Durch Vergleich der Koeffizienten erkennt man, dass die Bedingung $\mu'(x) = \mu(x)p(x)$ erfüllt sein muss. Diese Differentialgleichung für μ ist separabel und führt auf:

$$\mu(x) = e^{\int p(x) dx} \quad (9)$$

Bei der Berechnung des integrierenden Faktors kann die Integrationskonstante weggelassen werden, da nur eine spezielle Lösung für μ benötigt wird.

Durchführung der Lösungsmethode

Nachdem der integrierende Faktor bestimmt wurde, multipliziert man die ursprüngliche Differentialgleichung mit $\mu(x)$:

$$\mu(x) \frac{dy}{dx} + \mu(x)p(x)y = \mu(x)q(x) \quad (10)$$

Die linke Seite ist nun die Ableitung des Produkts $\mu(x)y$:

$$\frac{d}{dx}[\mu(x)y] = \mu(x)q(x) \quad (11)$$

Integration beider Seiten ergibt:

$$\mu(x)y = \int \mu(x)q(x) dx + C \quad (12)$$

Schließlich löst man nach y auf:

$$y(x) = \frac{1}{\mu(x)} \left[\int \mu(x)q(x) dx + C \right] \quad (13)$$

Diese Formel gibt die allgemeine Lösung der linearen Differentialgleichung in expliziter Form. Die Integrationskonstante C wird durch die Anfangsbedingung bestimmt.

Die Methode des integrierenden Faktors funktioniert für jede lineare Differentialgleichung erster Ordnung, sofern die auftretenden Integrale existieren. Sie reduziert das Lösen der Differentialgleichung auf die Ausführung von zwei Integrationen: eine für den integrierenden Faktor und eine für die rechte Seite.

Existenz und Eindeutigkeit von Lösungen

Bei vielen mathematischen Problemen stellt sich die Frage, ob überhaupt eine Lösung existiert und ob diese Lösung eindeutig bestimmt ist. Für Differentialgleichungen sind diese Fragen besonders wichtig, da sie sicherstellen, dass das mathematische Modell sinnvoll formuliert ist.

Ein Anfangswertproblem besteht aus einer Differentialgleichung zusammen mit einer Anfangsbedingung:

$$\frac{dy}{dx} = f(x, y), \quad y(x_0) = y_0 \quad (14)$$

Die Anfangsbedingung gibt den Wert der Lösung an einem bestimmten Punkt x_0 vor. Die Frage ist nun, ob es eine Funktion $y(x)$ gibt, die sowohl die Differentialgleichung erfüllt als auch durch den vorgegebenen Punkt (x_0, y_0) verläuft.

Der Satz von Picard-Lindelöf

Der wichtigste Existenz- und Eindeutigkeitsatz für Differentialgleichungen erster Ordnung ist der Satz von Picard-Lindelöf. Er liefert Bedingungen an die Funktion $f(x, y)$, unter denen das Anfangswertproblem eine eindeutige Lösung besitzt.

Der Satz besagt: Wenn die Funktion $f(x, y)$ und ihre partielle Ableitung $\frac{\partial f}{\partial y}$ in einer Umgebung des Punktes (x_0, y_0) stetig sind, dann existiert eine eindeutige Lösung $y(x)$ des Anfangswertproblems in einem Intervall um x_0 .

Die Stetigkeit von f garantiert die Existenz einer Lösung, während die Stetigkeit von $\frac{\partial f}{\partial y}$ die Eindeutigkeit sichert. Die Bedingung an die partielle Ableitung wird auch als Lipschitz-Stetigkeit bezeichnet und stellt sicher, dass kleine Änderungen in y nur zu kontrollierten Änderungen in f führen.

Bedeutung und Konsequenzen

Die Existenzaussage des Satzes gibt Gewissheit, dass das Anfangswertproblem überhaupt lösbar ist. Ohne eine solche Garantie könnte man Zeit mit der Suche nach einer Lösung verschwenden, die gar nicht existiert. Die Existenz ist allerdings nur lokal garantiert, das heißt in einem möglicherweise kleinen Intervall um x_0 . Die Lösung kann singular werden oder nur in einem begrenzten Bereich definiert sein.

Die Eindeutigkeitsaussage ist für praktische Anwendungen besonders wichtig. Sie garantiert, dass zwei Lösungen mit denselben Anfangsbedingungen identisch sein müssen. Es gibt also keine Mehrdeutigkeit oder Willkür bei der Wahl der Lösung. Jede physikalische Situation, die durch dieselben Anfangsbedingungen charakterisiert ist, führt zur selben zeitlichen Entwicklung.

Wenn die Voraussetzungen des Satzes verletzt sind, kann die Eindeutigkeit verlorengehen. Ein klassisches Beispiel ist die Differentialgleichung $y' = 2\sqrt{|y|}$ mit der Anfangsbedingung $y(0) = 0$. Hier ist $\frac{\partial f}{\partial y} = \frac{1}{\sqrt{|y|}}$ bei $y = 0$ nicht stetig. Tatsächlich besitzt dieses Anfangswertproblem unendlich viele Lösungen.

Fortsetzbarkeit von Lösungen

Der Satz von Picard-Lindelöf garantiert nur die lokale Existenz der Lösung in einem Intervall um den Anfangspunkt. In vielen Fällen lässt sich die Lösung jedoch über dieses Intervall hinaus fortsetzen. Die Lösung existiert dann in einem größeren oder sogar unbegrenzten Bereich.

Die Fortsetzbarkeit kann durch das Wachstumsverhalten der Lösung begrenzt sein. Wenn die Lösung in endlicher Zeit gegen unendlich strebt, spricht man von einem Blow-up. An der Stelle des Blow-up endet die maximale Fortsetzung der Lösung. Solche Phänomene treten etwa bei der Gleichung $y' = y^2$ mit positivem Anfangswert auf.

Für lineare Differentialgleichungen mit stetigen Koeffizienten existiert die Lösung dagegen immer global, das heißt für alle Werte von x . Dies ist eine wichtige Eigenschaft, die lineare Gleichungen von nichtlinearen unterscheidet und ihre Behandlung wesentlich vereinfacht.

Zusammenfassung

Differentialgleichungen erster Ordnung bilden die Grundlage für das Verständnis komplexerer Differentialgleichungen. Die Methode der Trennung der Variablen funktioniert für separable Gleichungen der Form $y' = g(x)h(y)$ und führt das Problem auf zwei unabhängige Integrationen zurück.

Lineare Differentialgleichungen erster Ordnung lassen sich systematisch mit der Methode des integrierenden Faktors lösen. Diese Methode transformiert die Gleichung so, dass ihre linke Seite als Produktableitung geschrieben werden kann, was eine direkte Integration ermöglicht.

Der Satz von Picard-Lindelöf liefert fundamentale Existenz- und Eindeutigkeitsaussagen für Anfangswertprobleme. Er garantiert unter geeigneten Stetigkeitsbedingungen, dass eine eindeutige lokale Lösung existiert. Diese theoretischen Resultate bilden die Grundlage für das Vertrauen in mathematische Modelle, die auf Differentialgleichungen basieren.