

Beispiele

Beispiel 1: Exponentielles Wachstum

Exponentielles Wachstum ist eines der einfachsten und zugleich wichtigsten Phänomene, die sich mit Differentialgleichungen beschreiben lassen. Es tritt immer dann auf, wenn die Änderungsrate einer Größe proportional zu ihrem aktuellen Wert ist. Typische Beispiele sind das Wachstum von Bakterienpopulationen unter idealen Bedingungen oder die Verzinsung eines Kapitals bei kontinuierlicher Zinsrechnung.

Problemstellung

Eine Bakterienkultur wächst unter optimalen Bedingungen, wobei die Wachstumsrate proportional zur aktuellen Populationsgröße ist. Zum Zeitpunkt $t = 0$ beträgt die Populationsgröße $N_0 = 1000$ Bakterien. Die Wachstumsrate beträgt $r = 0.5$ pro Stunde. Wir möchten die Populationsgröße nach drei Stunden bestimmen und das Wachstumsverhalten grafisch darstellen.

Mathematische Modellierung

Die Annahme, dass die Änderungsrate proportional zur Population ist, führt auf die Differentialgleichung:

$$\frac{dN}{dt} = rN \quad (1)$$

Die Proportionalitätskonstante r nennt man die Wachstumsrate. Sie gibt an, um welchen Bruchteil die Population pro Zeiteinheit wächst. Ein positiver Wert von r entspricht Wachstum, während ein negativer Wert zu exponentiellem Zerfall führen würde.

Diese Differentialgleichung ist separabel, denn die rechte Seite lässt sich als Produkt $r \cdot N$ schreiben, wobei r nur von t abhängt (als Konstante) und N nur von sich selbst. Wir trennen die Variablen:

$$\frac{1}{N} dN = r dt$$

Integration beider Seiten ergibt:

$$\int \frac{1}{N} dN = \int r dt$$
$$\ln |N| = rt + C_1$$

Durch Anwendung der Exponentialfunktion auf beide Seiten erhalten wir:

$$N(t) = Ce^{rt}$$

wobei $C = e^{C_1}$ eine positive Konstante ist. Die Anfangsbedingung $N(0) = N_0$ liefert:

$$N_0 = Ce^0 = C$$

Damit lautet die spezielle Lösung:

$$N(t) = N_0 e^{rt} \tag{2}$$

Für die gegebenen Werte $N_0 = 1000$, $r = 0.5$ und $t = 3$ Stunden ergibt sich:

$$N(3) = 1000 \cdot e^{0.5 \cdot 3} = 1000 \cdot e^{1.5} \approx 4482$$

Nach drei Stunden ist die Population auf etwa 4482 Bakterien angewachsen, also mehr als das Vierfache der Ausgangspopulation.

Visualisierung

Die folgende Grafik zeigt den exponentiellen Verlauf der Populationsgröße über einen Zeitraum von zehn Stunden. Die charakteristische Eigenschaft des exponentiellen Wachstums ist, dass die Steigung der Kurve ständig zunimmt. Je größer die Population wird, desto schneller wächst sie weiter.

```
import numpy as np
import matplotlib.pyplot as plt

# Parameter
NO = 1000
r = 0.5
t = np.linspace(0, 10, 100)

# Lösung
N = NO * np.exp(r * t)

# Plot
```

```

plt.figure(figsize=(7, 4))
plt.plot(t, N, 'b-', linewidth=2, label=f'$N(t) = {N_0}e^{{r}t}$')
plt.axhline(y=N_0, color='r', linestyle='--', alpha=0.5, label=f'Anfangswert $N_0 = {N_0}$')
plt.xlabel('Zeit $t$ (Stunden)', fontsize=12)
plt.ylabel('Population $N(t)$', fontsize=12)
plt.title('Exponentielles Bakterienwachstum', fontsize=14)
plt.grid(True, alpha=0.3)
plt.legend(fontsize=11)
plt.show()

```

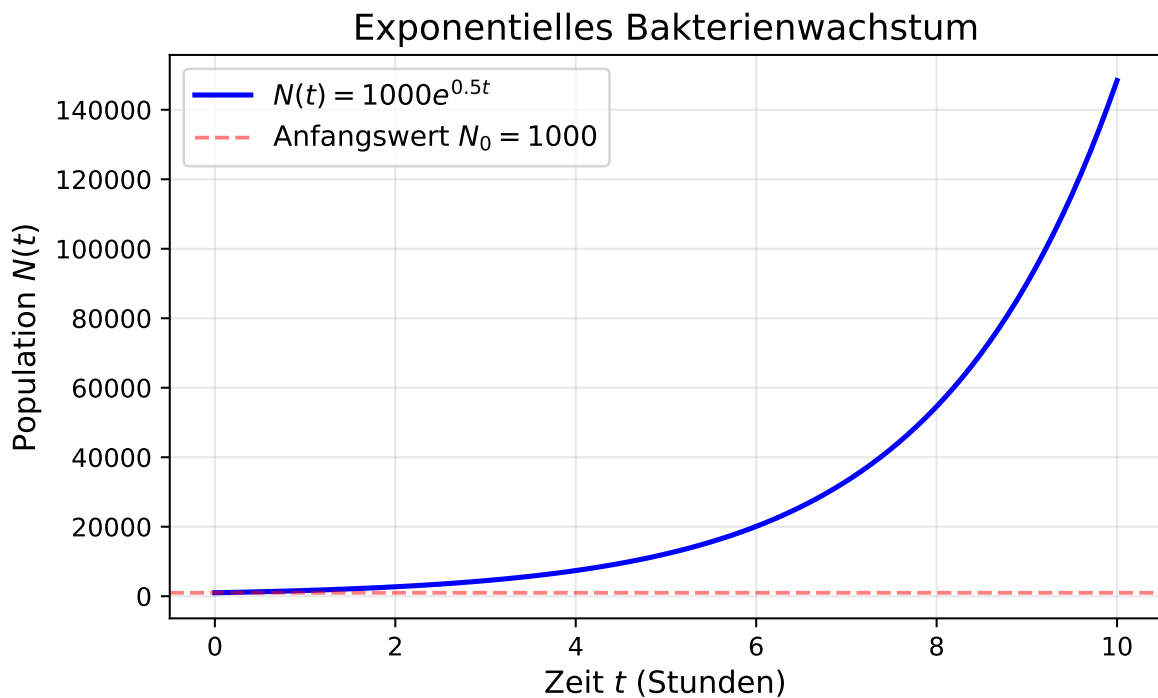


Abbildung 1: Exponentielles Wachstum einer Bakterienpopulation

Beispiel 2: Radioaktiver Zerfall

Der radioaktive Zerfall ist das natürliche Gegenstück zum exponentiellen Wachstum. Bei radioaktiven Substanzen nimmt die Anzahl der noch nicht zerfallenen Atomkerne mit der Zeit ab. Die Zerfallsrate ist dabei proportional zur Anzahl der vorhandenen Kerne, was zu einem exponentiellen Abklingen führt.

Problemstellung

Kohlenstoff-14 ist ein radioaktives Isotop, das in der Archäologie zur Altersbestimmung verwendet wird. Es zerfällt mit einer Halbwertszeit von $T_{1/2} = 5730$ Jahren. Wir möchten bestimmen, wie viel von einer ursprünglich vorhandenen Menge nach 10000 Jahren noch übrig ist.

Mathematische Modellierung

Die Annahme, dass die Zerfallsrate proportional zur vorhandenen Menge ist, führt auf die Differentialgleichung:

$$\frac{dN}{dt} = -\lambda N \quad (3)$$

Das Minuszeichen zeigt an, dass die Menge abnimmt. Die Zerfallskonstante $\lambda > 0$ charakterisiert die Geschwindigkeit des Zerfalls. Je größer λ , desto schneller zerfällt die Substanz.

Diese Differentialgleichung ist strukturell identisch mit der Wachstumsgleichung, nur dass das Vorzeichen negativ ist. Die Lösung erhält man analog durch Separation der Variablen:

$$N(t) = N_0 e^{-\lambda t} \quad (4)$$

Die Halbwertszeit $T_{1/2}$ ist definiert als die Zeit, nach der die Hälfte der ursprünglichen Menge zerfallen ist. Mathematisch bedeutet dies $N(T_{1/2}) = N_0/2$. Einsetzen in die Lösung ergibt:

$$\frac{N_0}{2} = N_0 e^{-\lambda T_{1/2}}$$

Division durch N_0 und Logarithmieren führt auf:

$$\ln\left(\frac{1}{2}\right) = -\lambda T_{1/2}$$

Daraus folgt der Zusammenhang zwischen Halbwertszeit und Zerfallskonstante:

$$\lambda = \frac{\ln 2}{T_{1/2}} \quad (5)$$

Für Kohlenstoff-14 mit $T_{1/2} = 5730$ Jahren ergibt sich:

$$\lambda = \frac{0.693}{5730} \approx 1.21 \times 10^{-4} \text{ Jahr}^{-1}$$

Nach 10000 Jahren beträgt die verbleibende Menge:

$$N(10000) = N_0 e^{-\lambda \cdot 10000} = N_0 e^{-1.21} \approx 0.298 N_0$$

Etwa 30 Prozent der ursprünglichen Menge sind noch vorhanden, während 70 Prozent bereits zerfallen sind.

Visualisierung

Die Grafik zeigt den charakteristischen exponentiellen Abfall der radioaktiven Substanz. Die vertikalen Linien markieren die Halbwertszeiten. Nach jeder Halbwertszeit ist genau die Hälfte der zu Beginn dieser Periode vorhandenen Menge zerfallen. Dieses Halbierungsmuster wiederholt sich unbegrenzt.

```
import numpy as np
import matplotlib.pyplot as plt

# Parameter
T_half = 5730 # Halbwertszeit in Jahren
lambda_decay = np.log(2) / T_half
t = np.linspace(0, 20000, 1000)

# Lösung (normalisiert auf  $N_0 = 1$ )
N = np.exp(-lambda_decay * t)

# Plot
plt.figure(figsize=(7, 4))
plt.plot(t, N, 'b-', linewidth=2, label='$N(t)/N_0 = e^{-\lambda t}$')
plt.axhline(y=0.5, color='r', linestyle='--', alpha=0.5, label=f'Halbwertszeit  $T_{\{1/2\}} =$ 
plt.axvline(x=T_half, color='r', linestyle='--', alpha=0.5)
plt.axvline(x=2*T_half, color='r', linestyle='--', alpha=0.3)
plt.axvline(x=3*T_half, color='r', linestyle='--', alpha=0.3)
plt.xlabel('Zeit  $t$  (Jahre)', fontsize=12)
plt.ylabel('Verbleibendes Material  $N(t)/N_0$ ', fontsize=12)
plt.title('Radioaktiver Zerfall: Kohlenstoff-14', fontsize=14)
plt.grid(True, alpha=0.3)
plt.legend(fontsize=11)
plt.show()
```

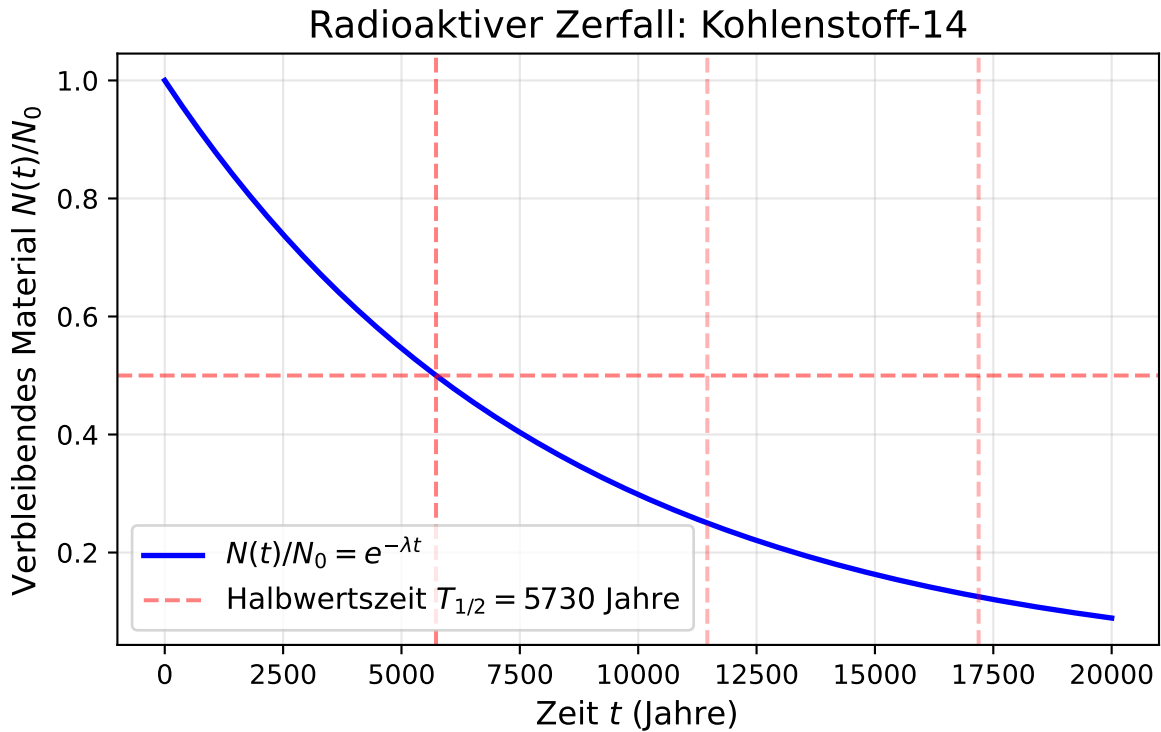


Abbildung 2: Radioaktiver Zerfall von Kohlenstoff-14

Beispiel 3: Freier Fall mit Luftwiderstand

Ein fallender Körper in der Erdatmosphäre unterliegt nicht nur der Schwerkraft, sondern auch dem bremsenden Einfluss des Luftwiderstands. Für moderate Geschwindigkeiten kann der Luftwiderstand als proportional zur Geschwindigkeit angenommen werden. Dies führt zu einer linearen Differentialgleichung erster Ordnung.

Problemstellung

Ein Objekt der Masse m fällt aus der Ruhe unter dem Einfluss der Schwerkraft. Der Luftwiderstand erzeugt eine der Bewegung entgegengesetzte Kraft, die proportional zur Geschwindigkeit ist. Wir möchten die Geschwindigkeit als Funktion der Zeit bestimmen und insbesondere die Endgeschwindigkeit untersuchen, die der Körper asymptotisch erreicht.

Mathematische Modellierung

Die auf den Körper wirkenden Kräfte sind die Gewichtskraft $F_g = mg$ in Fallrichtung und die Luftwiderstandskraft $F_d = -kv$ entgegen der Fallrichtung. Dabei bezeichnet k den Luftwiderstandskoeffizienten und v die Geschwindigkeit. Das Minuszeichen zeigt an, dass die Kraft der Bewegung entgegenwirkt.

Nach dem zweiten Newtonschen Gesetz gilt:

$$m \frac{dv}{dt} = mg - kv \quad (6)$$

Division durch m führt auf die Standardform:

$$\frac{dv}{dt} = g - \frac{k}{m}v \quad (7)$$

Dies ist eine inhomogene lineare Differentialgleichung erster Ordnung. Die Umformung in die Standardform $v' + p(t)v = q(t)$ ergibt:

$$v' + \frac{k}{m}v = g$$

Hier ist $p(t) = k/m$ konstant und $q(t) = g$ ebenfalls konstant.

Lösung mit integrierendem Faktor

Der integrierende Faktor ist:

$$\mu(t) = e^{\int \frac{k}{m} dt} = e^{\frac{k}{m}t}$$

Multiplikation der Differentialgleichung mit $\mu(t)$ führt auf:

$$e^{\frac{k}{m}t} \frac{dv}{dt} + e^{\frac{k}{m}t} \frac{k}{m}v = ge^{\frac{k}{m}t}$$

Die linke Seite ist die Ableitung von $e^{\frac{k}{m}t}v$:

$$\frac{d}{dt} [e^{\frac{k}{m}t}v] = ge^{\frac{k}{m}t}$$

Integration liefert:

$$e^{\frac{k}{m}t}v = g \cdot \frac{m}{k} e^{\frac{k}{m}t} + C$$

Auflösen nach v ergibt:

$$v(t) = \frac{mg}{k} + Ce^{-\frac{k}{m}t} \quad (8)$$

Die Anfangsbedingung $v(0) = 0$ (Körper fällt aus der Ruhe) bestimmt die Konstante:

$$0 = \frac{mg}{k} + C \Rightarrow C = -\frac{mg}{k}$$

Die spezielle Lösung lautet:

$$v(t) = \frac{mg}{k} \left(1 - e^{-\frac{k}{m}t}\right) \quad (9)$$

Physikalische Interpretation

Für große Zeiten strebt der Exponentialterm $e^{-\frac{k}{m}t}$ gegen null. Die Geschwindigkeit nähert sich asymptotisch dem Grenzwert:

$$v_\infty = \lim_{t \rightarrow \infty} v(t) = \frac{mg}{k} \quad (10)$$

Dieser Grenzwert heißt Endgeschwindigkeit oder Terminalgeschwindigkeit. Bei dieser Geschwindigkeit kompensiert der Luftwiderstand genau die Gewichtskraft, sodass die Nettokraft verschwindet und keine weitere Beschleunigung mehr stattfindet.

Die Endgeschwindigkeit ist umso größer, je schwerer der Körper und je kleiner der Luftwiderstandskoeffizient ist. Ein schwerer, stromlinienförmiger Körper erreicht eine höhere Endgeschwindigkeit als ein leichter Körper mit großer Querschnittsfläche.

Visualisierung

Die Grafik zeigt die Geschwindigkeit als Funktion der Zeit für verschiedene Luftwiderstandskoeffizienten. Je größer der Luftwiderstand, desto kleiner ist die Endgeschwindigkeit und desto schneller wird sie erreicht. Bei sehr kleinem Luftwiderstand steigt die Geschwindigkeit anfangs fast linear wie beim freien Fall ohne Luftwiderstand.

```
import numpy as np
import matplotlib.pyplot as plt

# Parameter
g = 9.81 # m/s^2
m = 1.0 # kg
k_values = [0.1, 0.5, 1.0, 2.0] # verschiedene Luftwiderstände

t = np.linspace(0, 10, 1000)
```

```

plt.figure(figsize=(7, 4))
for k in k_values:
    v_terminal = m * g / k
    v = v_terminal * (1 - np.exp(-k * t / m))
    plt.plot(t, v, linewidth=2, label=f'$k = {k}$ kg/s ($\{v\_terminal:.1f}$ m/s)')

plt.xlabel('Zeit $t$ (s)', fontsize=12)
plt.ylabel('Geschwindigkeit $v(t)$ (m/s)', fontsize=12)
plt.title('Freier Fall mit Luftwiderstand', fontsize=14)
plt.grid(True, alpha=0.3)
plt.legend(fontsize=10, title='Luftwiderstand (Endgeschwindigkeit)')
plt.show()

```

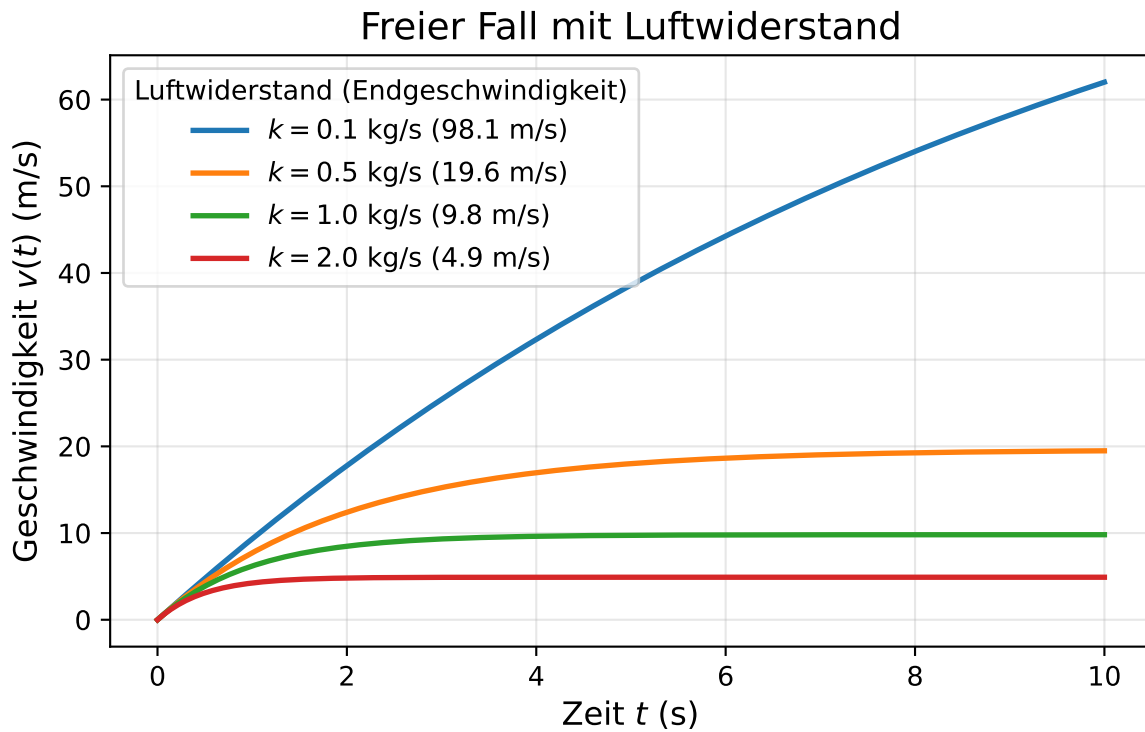


Abbildung 3: Fallende Objekte mit verschiedenen Luftwiderstandskoeffizienten

Beispiel 4: Mischungsproblem

Mischungsprobleme treten in vielen praktischen Situationen auf, etwa in der chemischen Verfahrenstechnik, der Umwelttechnik oder der Pharmazie. Ein typisches Problem ist ein Behälter mit einer Lösung, in den kontinuierlich frische Lösung einfließt, während gleichzeitig gemischte Lösung abfließt.

Problemstellung

Ein Tank enthält 100 Liter Wasser, in dem 20 kg Salz gelöst sind. Eine Salzlösung mit einer Konzentration von 0.5 kg pro Liter fließt mit einer Rate von 4 Litern pro Minute in den Tank. Die Lösung im Tank wird kontinuierlich gut durchmischt. Gleichzeitig fließt die Mischung mit derselben Rate von 4 Litern pro Minute aus dem Tank ab. Wir möchten die Salzmenge im Tank nach 30 Minuten bestimmen.

Mathematische Modellierung

Sei $S(t)$ die Salzmenge im Tank zur Zeit t in Kilogramm. Die Änderungsrate von S setzt sich aus zwei Beiträgen zusammen:

$$\frac{dS}{dt} = (\text{Salzeinstrom}) - (\text{Salzausstrom}) \quad (11)$$

Der Salzeinstrom beträgt:

$$\text{Einstrom} = 0.5 \frac{\text{kg}}{\text{L}} \times 4 \frac{\text{L}}{\text{min}} = 2 \frac{\text{kg}}{\text{min}}$$

Der Salzausstrom hängt von der aktuellen Konzentration im Tank ab. Da das Volumen konstant bei 100 Litern bleibt (gleiche Ein- und Ausflussrate), ist die Konzentration $S(t)/100$ kg pro Liter. Der Ausstrom beträgt daher:

$$\text{Ausstrom} = \frac{S(t)}{100} \frac{\text{kg}}{\text{L}} \times 4 \frac{\text{L}}{\text{min}} = \frac{S(t)}{25} \frac{\text{kg}}{\text{min}}$$

Die Differentialgleichung lautet:

$$\frac{dS}{dt} = 2 - \frac{S}{25} \quad (12)$$

mit der Anfangsbedingung $S(0) = 20$ kg.

Lösung

Dies ist eine lineare Differentialgleichung der Form $S' + \frac{1}{25}S = 2$. Der integrierende Faktor ist:

$$\mu(t) = e^{\int \frac{1}{25} dt} = e^{\frac{t}{25}}$$

Multiplikation mit $\mu(t)$ und Integration ergibt:

$$e^{\frac{t}{25}} S = \int 2e^{\frac{t}{25}} dt = 2 \cdot 25e^{\frac{t}{25}} + C = 50e^{\frac{t}{25}} + C$$

Division durch $e^{\frac{t}{25}}$ liefert:

$$S(t) = 50 + Ce^{-\frac{t}{25}} \quad (13)$$

Die Anfangsbedingung $S(0) = 20$ bestimmt die Konstante:

$$20 = 50 + C \quad \Rightarrow \quad C = -30$$

Die spezielle Lösung lautet:

$$S(t) = 50 - 30e^{-\frac{t}{25}} \quad (14)$$

Nach 30 Minuten ergibt sich:

$$S(30) = 50 - 30e^{-30/25} = 50 - 30e^{-1.2} \approx 50 - 9.0 = 41 \text{ kg}$$

Physikalische Interpretation

Die Salzmenge nähert sich asymptotisch dem Gleichgewichtswert von 50 kg. Dieser Gleichgewichtswert ergibt sich, wenn Einstrom und Ausstrom gleich groß sind:

$$2 = \frac{S_{\text{eq}}}{25} \quad \Rightarrow \quad S_{\text{eq}} = 50 \text{ kg}$$

Bei diesem Wert entspricht die Konzentration im Tank genau der Konzentration der einfließenden Lösung, nämlich 0.5 kg pro Liter. Da anfangs weniger Salz im Tank ist, nimmt die Salzmenge zu. Der Exponentialterm beschreibt das Abklingen der Abweichung vom Gleichgewicht.

Visualisierung

Die Grafik zeigt den exponentiellen Anstieg der Salzmenge von 20 kg auf den Gleichgewichtswert von 50 kg. Die Geschwindigkeit der Annäherung hängt von der charakteristischen Zeit $\tau = 25$ Minuten ab, die sich aus dem Verhältnis von Tankvolumen zu Durchflussrate ergibt.

```

import numpy as np
import matplotlib.pyplot as plt

# Parameter
S0 = 20 # Anfangssalzmenge (kg)
t = np.linspace(0, 150, 1000)

# Lösung
S = 50 - 30 * np.exp(-t / 25)

plt.figure(figsize=(7, 4))
plt.plot(t, S, 'b-', linewidth=2, label='$S(t) = 50 - 30e^{-t/25}$')
plt.axhline(y=50, color='r', linestyle='--', alpha=0.5, label='Gleichgewicht: 50 kg')
plt.axhline(y=S0, color='g', linestyle='--', alpha=0.5, label=f'Anfang: {S0} kg')
plt.xlabel('Zeit $t$ (Minuten)', fontsize=12)
plt.ylabel('Salzmenge $S(t)$ (kg)', fontsize=12)
plt.title('Mischungsproblem: Salz im Tank', fontsize=14)
plt.grid(True, alpha=0.3)
plt.legend(fontsize=11)
plt.xlim([0, 150])
plt.show()

```

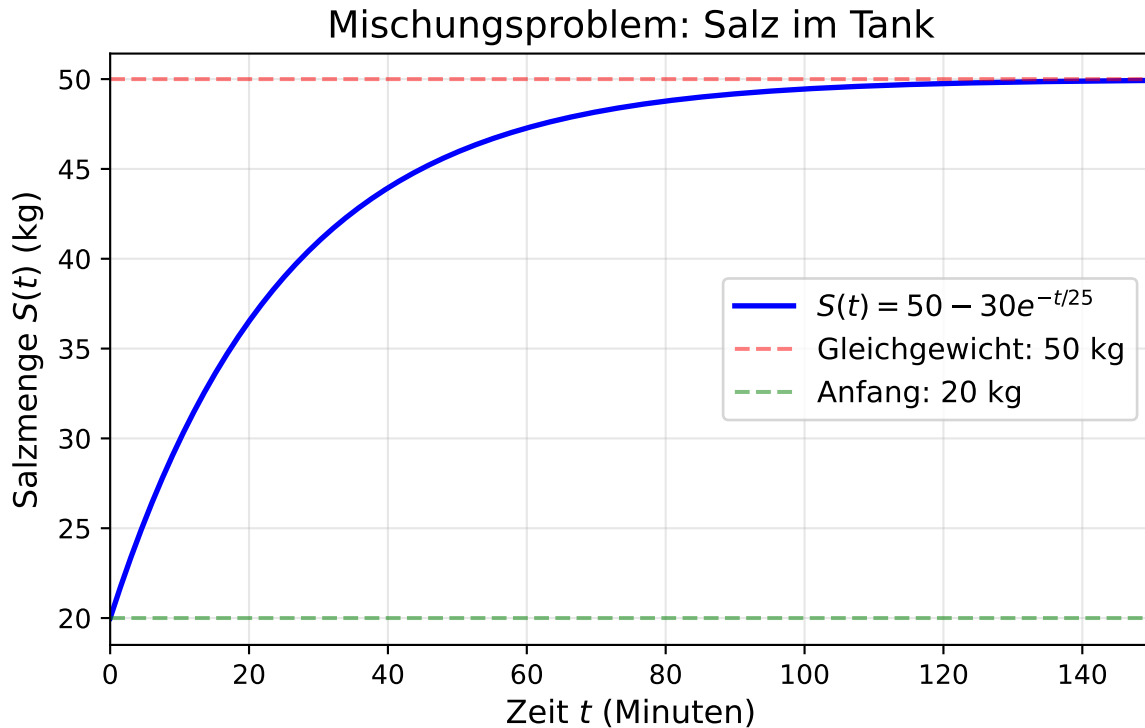


Abbildung 4: Salzmenge im Tank über Zeit

Beispiel 5: RC-Schaltkreis

Der RC-Schaltkreis ist ein grundlegendes Beispiel aus der Elektrotechnik, bei dem die Spannung über einem Kondensator einer Differentialgleichung erster Ordnung genügt. Das Verhalten dieses einfachen Schaltkreises ist prototypisch für viele elektrische und elektronische Systeme.

Problemstellung

Ein RC-Schaltkreis besteht aus einem Widerstand R und einem Kondensator C , die in Reihe mit einer konstanten Spannungsquelle V_0 geschaltet sind. Zum Zeitpunkt $t = 0$ ist der Kondensator ungeladen. Wir möchten die Spannung über dem Kondensator als Funktion der Zeit bestimmen.

Mathematische Modellierung

Nach dem Kirchhoffschen Spannungsgesetz entspricht die Quellenspannung der Summe der Spannungen über Widerstand und Kondensator:

$$V_0 = V_R + V_C \quad (15)$$

Die Spannung über dem Widerstand ist nach dem Ohmschen Gesetz $V_R = RI$, wobei I der Strom ist. Die Spannung über dem Kondensator ist $V_C = Q/C$, wobei Q die Ladung auf dem Kondensator bezeichnet. Der Strom ist die zeitliche Änderungsrate der Ladung: $I = dQ/dt$.

Mit $Q = CV_C$ folgt $I = C dV_C/dt$. Einsetzen in das Kirchhoffsche Gesetz ergibt:

$$V_0 = RC \frac{dV_C}{dt} + V_C \quad (16)$$

Umformung in Standardform liefert:

$$\frac{dV_C}{dt} + \frac{1}{RC} V_C = \frac{V_0}{RC} \quad (17)$$

Dies ist eine inhomogene lineare Differentialgleichung erster Ordnung mit konstanten Koeffizienten.

Lösung

Der integrierende Faktor ist:

$$\mu(t) = e^{\int \frac{1}{RC} dt} = e^{\frac{t}{RC}}$$

Multiplikation mit $\mu(t)$ und Integration führt auf:

$$e^{\frac{t}{RC}} V_C = \int \frac{V_0}{RC} e^{\frac{t}{RC}} dt = V_0 e^{\frac{t}{RC}} + C$$

Division durch $e^{\frac{t}{RC}}$ ergibt:

$$V_C(t) = V_0 + C e^{-\frac{t}{RC}} \quad (18)$$

Die Anfangsbedingung $V_C(0) = 0$ (ungeladener Kondensator) bestimmt die Konstante:

$$0 = V_0 + C \quad \Rightarrow \quad C = -V_0$$

Die spezielle Lösung lautet:

$$V_C(t) = V_0 \left(1 - e^{-\frac{t}{RC}}\right) \quad (19)$$

Physikalische Interpretation

Die Kondensatorspannung steigt exponentiell von null auf den Endwert V_0 . Die Geschwindigkeit dieses Anstiegs wird durch die Zeitkonstante $\tau = RC$ charakterisiert. Nach einer Zeitkonstante hat die Spannung etwa 63 Prozent ihres Endwerts erreicht:

$$V_C(\tau) = V_0(1 - e^{-1}) \approx 0.632V_0$$

Nach etwa fünf Zeitkonstanten ist der Kondensator praktisch vollständig aufgeladen. Ein großer Widerstand oder eine große Kapazität führen zu einer langen Zeitkonstante und damit zu einem langsamen Ladevorgang. Diese RC-Zeitkonstante spielt in der Elektronik eine fundamentale Rolle für Zeitverzögerungen, Filter und viele andere Anwendungen.

Visualisierung

Die Grafik zeigt den charakteristischen exponentiellen Verlauf der Kondensatorspannung. Die Tangente am Ursprung würde die Endspannung V_0 genau nach einer Zeitkonstante τ erreichen. Tatsächlich erreicht die Kurve die Endspannung aber nur asymptotisch.

```
import numpy as np
import matplotlib.pyplot as plt

# Parameter
V0 = 10 # Volt
RC = 2 # Sekunden (Zeitkonstante)

t = np.linspace(0, 10, 1000)

# Lösung
V_C = V0 * (1 - np.exp(-t / RC))

plt.figure(figsize=(7, 4))
plt.plot(t, V_C, 'b-', linewidth=2, label='$V_C(t) = V_0(1 - e^{-t/(RC)})$')
plt.axhline(y=V0, color='r', linestyle='--', alpha=0.5, label=f'$V_0 = {V0}$ V')
plt.axvline(x=RC, color='g', linestyle='--', alpha=0.5, label=f'$\tau = RC = {RC}$ s')
plt.axhline(y=V0*0.632, color='g', linestyle=':', alpha=0.5)
plt.xlabel('Zeit $t$ (s)', fontsize=12)
plt.ylabel('Spannung $V_C(t)$ (V)', fontsize=12)
plt.title('Kondensator-Aufladung im RC-Schaltkreis', fontsize=14)
plt.grid(True, alpha=0.3)
plt.legend(fontsize=11)
plt.show()
```

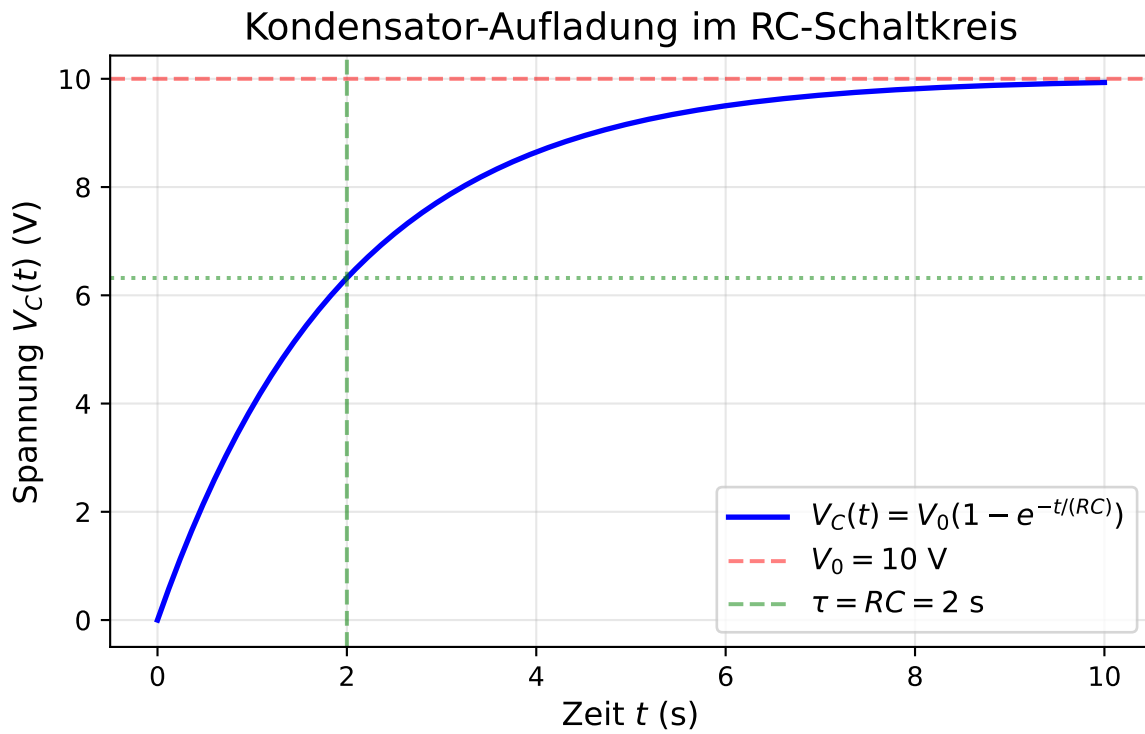


Abbildung 5: Aufladen eines Kondensators im RC-Schaltkreis