

Konzepte

i Lernziele

Die Studierenden sollen...

- ... die Bewegungsgleichung des gedämpften harmonischen Oszillators erläutern und den charakteristischen Ansatz anwenden können.
- ... die drei Dämpfungsregime (Schwingfall, Kriechfall, aperiodischer Grenzfall) unterscheiden und deren physikalische Bedeutung erklären können.
- ... die Resonanzfrequenz und Amplitude erzwungener Schwingungen berechnen können.

Der gedämpfte harmonische Oszillator

Der gedämpfte harmonische Oszillator ist eines der wichtigsten Modelle in der Physik und Ingenieurwissenschaft. Er beschreibt ein schwingendes System, bei dem Energie durch Reibung oder Widerstand dissipiert wird. Die Bewegungsgleichung lautet:

$$m\ddot{x} + c\dot{x} + kx = 0 \quad (1)$$

Hierbei ist m die Masse, c der Dämpfungskoeffizient und k die Federkonstante. Der Term $c\dot{x}$ beschreibt eine geschwindigkeitsproportionale Dämpfung, wie sie etwa bei viskoser Reibung oder Luftwiderstand auftritt.

Wir können die Gleichung in eine Standardform bringen, indem wir beide Seiten durch m teilen:

$$\ddot{x} + 2\gamma\dot{x} + \omega_0^2 x = 0 \quad (2)$$

Dabei haben wir zwei charakteristische Parameter eingeführt. Die Dämpfungskonstante $\gamma = \frac{c}{2m}$ gibt an, wie stark die Dämpfung wirkt. Die Eigenfrequenz $\omega_0 = \sqrt{\frac{k}{m}}$ entspricht der Frequenz, mit der das System ohne Dämpfung schwingen würde.

Der charakteristische Ansatz

Um die Differentialgleichung zu lösen, machen wir einen Exponentialansatz. Dieser Ansatz ist für lineare Differentialgleichungen mit konstanten Koeffizienten besonders geeignet. Wir setzen:

$$x(t) = e^{\lambda t}$$

Die Ableitungen sind dann $\dot{x} = \lambda e^{\lambda t}$ und $\ddot{x} = \lambda^2 e^{\lambda t}$. Einsetzen in die Differentialgleichung ergibt:

$$\lambda^2 e^{\lambda t} + 2\gamma \lambda e^{\lambda t} + \omega_0^2 e^{\lambda t} = 0$$

Da $e^{\lambda t}$ niemals null ist, können wir durch diesen Faktor teilen. Dies führt zur charakteristischen Gleichung:

$$\lambda^2 + 2\gamma \lambda + \omega_0^2 = 0 \quad (3)$$

Diese quadratische Gleichung bestimmt die möglichen Werte von λ . Die Lösungen sind:

$$\lambda_{1,2} = -\gamma \pm \sqrt{\gamma^2 - \omega_0^2} \quad (4)$$

Das Verhalten des Systems hängt entscheidend vom Vorzeichen des Ausdrucks unter der Wurzel ab. Dieser Ausdruck wird Diskriminante genannt.

Dämpfungsregime

Schwache Dämpfung (Schwingfall)

Wenn die Dämpfung schwach ist, gilt $\gamma < \omega_0$. In diesem Fall ist die Diskriminante $\gamma^2 - \omega_0^2$ negativ. Die Wurzel einer negativen Zahl führt zu komplexen Lösungen. Wir schreiben:

$$\lambda_{1,2} = -\gamma \pm i\omega_d$$

wobei $\omega_d = \sqrt{\omega_0^2 - \gamma^2}$ die gedämpfte Frequenz ist. Diese liegt unterhalb der ungedämpften Eigenfrequenz ω_0 .

Die allgemeine Lösung ist eine Linearkombination von $e^{\lambda_1 t}$ und $e^{\lambda_2 t}$. Durch Umformung mit der Eulerschen Formel erhalten wir:

$$x(t) = Ae^{-\gamma t} \cos(\omega_d t + \phi) \quad (5)$$

Das System führt gedämpfte Schwingungen aus. Die Amplitude $Ae^{-\gamma t}$ nimmt exponentiell mit der Zeit ab, während das System mit der Frequenz ω_d oszilliert. Die Konstanten A und ϕ werden durch die Anfangsbedingungen bestimmt.

Starke Dämpfung (Kriechfall)

Bei starker Dämpfung gilt $\gamma > \omega_0$. Die Diskriminante ist nun positiv, und beide Lösungen λ_1 und λ_2 sind reell und negativ. Die allgemeine Lösung lautet:

$$x(t) = C_1 e^{\lambda_1 t} + C_2 e^{\lambda_2 t} \quad (6)$$

Da beide Exponenten negativ sind, klingt die Bewegung exponentiell ab, ohne zu oszillieren. Das System kehrt monoton zur Ruhelage zurück. Die Dämpfung ist so stark, dass sie Schwingungen verhindert.

Kritische Dämpfung (aperiodischer Grenzfall)

Der Grenzfall zwischen Schwingfall und Kriechfall tritt bei $\gamma = \omega_0$ ein. In diesem Fall wird die Diskriminante null, und beide Lösungen der charakteristischen Gleichung sind identisch: $\lambda_1 = \lambda_2 = -\gamma$.

Bei einer Doppelwurzel reicht eine einfache Exponentialfunktion nicht aus, um die allgemeine Lösung zu konstruieren. Die mathematische Theorie linearer Differentialgleichungen zeigt, dass eine zweite linear unabhängige Lösung durch Multiplikation mit t entsteht. Die allgemeine Lösung lautet daher:

$$x(t) = (C_1 + C_2 t) e^{-\gamma t} \quad (7)$$

Kritische Dämpfung ist in der Praxis wichtig, weil sie die schnellste Rückkehr zur Ruhelage ohne Überschwingen ermöglicht. Dieses Verhalten ist beispielsweise bei Stoßdämpfern oder Messgeräten erwünscht.

Erzwungene Schwingungen

Wenn eine äußere periodische Kraft auf das System wirkt, wird die Differentialgleichung inhomogen. Wir betrachten eine harmonische Anregung mit Kreisfrequenz ω :

$$m\ddot{x} + c\dot{x} + kx = F_0 \cos(\omega t) \quad (8)$$

Die allgemeine Lösung besteht aus zwei Teilen. Der erste Teil ist die Lösung der homogenen Gleichung, die wir bereits kennen. Diese beschreibt die Eigenschwingung des Systems und klingt mit der Zeit ab. Der zweite Teil ist eine partikuläre Lösung der inhomogenen Gleichung. Diese beschreibt die stationäre Schwingung, die vom System nach Abklingen der Eigenschwingung ausgeführt wird.

Für die stationäre Lösung machen wir einen Ansatz mit derselben Frequenz wie die Anregung:

$$x_p(t) = A \cos(\omega t - \phi)$$

Dabei ist A die Amplitude und ϕ die Phasenverschiebung gegenüber der Anregung. Beide Größen hängen von der Anregungsfrequenz ω ab.

Durch Einsetzen in die Differentialgleichung und Koeffizientenvergleich erhält man:

$$A(\omega) = \frac{F_0/m}{\sqrt{(\omega_0^2 - \omega^2)^2 + (2\gamma\omega)^2}} \quad (9)$$

und

$$\tan \phi(\omega) = \frac{2\gamma\omega}{\omega_0^2 - \omega^2} \quad (10)$$

Resonanz

Die Amplitude $A(\omega)$ als Funktion der Anregungsfrequenz ω zeigt ein charakteristisches Verhalten. Sie hat ein Maximum in der Nähe der Eigenfrequenz ω_0 . Dieses Phänomen nennt man Resonanz.

Die Resonanzfrequenz, bei der die Amplitude maximal wird, liegt bei:

$$\omega_{\text{res}} = \sqrt{\omega_0^2 - 2\gamma^2} \quad (11)$$

Für schwache Dämpfung liegt die Resonanzfrequenz nahe bei der Eigenfrequenz. Bei starker Dämpfung kann die Resonanzfrequenz sogar verschwinden, das heißt, die Amplitude nimmt mit wachsender Frequenz monoton ab.

Die Höhe des Resonanzmaximums wird durch die Dämpfung bestimmt. Bei sehr schwacher Dämpfung kann die Amplitude sehr groß werden. Im Grenzfall verschwindender Dämpfung würde die Amplitude bei $\omega = \omega_0$ gegen unendlich gehen. Dies ist der Fall der ungedämpften Resonanz.

Die Phase ϕ beschreibt die zeitliche Verzögerung zwischen Anregung und Antwort. Bei niedrigen Frequenzen folgt das System der Anregung fast ohne Verzögerung. Bei der Eigenfrequenz beträgt die Phasenverschiebung genau 90° . Bei hohen Frequenzen nähert sich die Phase 180° , das heißt, das System schwingt gegenphasig zur Anregung.

Energiebetrachtung

Die Gesamtenergie des harmonischen Oszillators setzt sich aus kinetischer und potentieller Energie zusammen:

$$E(t) = \frac{1}{2}m\dot{x}^2 + \frac{1}{2}kx^2$$

Für den ungedämpften Oszillator ist diese Energie konstant. Bei Dämpfung nimmt die Energie jedoch ab. Die zeitliche Änderung der Energie ergibt sich durch Ableiten:

$$\frac{dE}{dt} = m\dot{x}\ddot{x} + kx\dot{x}$$

Unter Verwendung der Bewegungsgleichung $m\ddot{x} = -c\dot{x} - kx$ erhalten wir:

$$\frac{dE}{dt} = -c\dot{x}^2 \tag{12}$$

Die Energieänderung ist stets negativ oder null. Die dissipierte Leistung ist proportional zum Quadrat der Geschwindigkeit. Diese Energie wird durch Reibung in Wärme umgewandelt und ist für das System verloren.

Bei erzwungenen Schwingungen wird dem System durch die äußere Kraft Energie zugeführt. Im stationären Zustand gleicht die zugeführte Leistung die dissipierte Leistung aus. Dies führt zu einer konstanten Amplitude der Schwingung.

Gütefaktor

Eine wichtige Kennzahl für gedämpfte Oszillatoren ist der Gütefaktor Q . Er ist definiert als:

$$Q = \frac{\omega_0}{2\gamma} \tag{13}$$

Der Gütefaktor gibt das Verhältnis zwischen gespeicherter und dissipierter Energie an. Ein hoher Gütefaktor bedeutet schwache Dämpfung und ein scharfes Resonanzmaximum. Ein niedriger Gütefaktor entspricht starker Dämpfung und einem breiten, flachen Resonanzmaximum.

Der Gütefaktor kann auch als Anzahl der Schwingungen interpretiert werden, nach denen die Amplitude auf einen Bruchteil $1/e$ abgefallen ist. Bei schwach gedämpften Systemen ist $Q \gg 1$, und das System schwingt viele Male, bevor es zur Ruhe kommt.

Zusammenfassung

Der gedämpfte harmonische Oszillator zeigt je nach Stärke der Dämpfung drei verschiedene Verhaltensweisen. Bei schwacher Dämpfung führt das System gedämpfte Schwingungen aus, deren Amplitude exponentiell abnimmt. Bei starker Dämpfung kehrt es ohne Oszillation zur Ruhelage zurück. Der kritisch gedämpfte Fall markiert den Übergang zwischen beiden Regimen und ermöglicht die schnellste Rückkehr ohne Überschwingen.

Unter dem Einfluss einer periodischen äußeren Kraft zeigt der Oszillator das Phänomen der Resonanz. Die Amplitude der stationären Schwingung ist maximal, wenn die Anregungsfrequenz nahe der Eigenfrequenz liegt. Die Dämpfung bestimmt die Breite und Höhe des Resonanzmaximums. Diese Eigenschaften sind für viele technische Anwendungen von grundlegender Bedeutung.