

# Konzepte

## **i** Lernziele

Die Studierenden sollen...

- ... Differentialgleichungen höherer Ordnung in Systeme erster Ordnung überführen können.
- ... die Phasenebene zur geometrischen Interpretation von Systemen mit zwei Variablen interpretieren können.
- ... die Stabilität linearer Systeme anhand der Eigenwerte der Systemmatrix analysieren können.

## Systeme von Differentialgleichungen

In den bisherigen Kapiteln haben wir einzelne Differentialgleichungen betrachtet, bei denen jeweils nur eine unbekannte Funktion auftritt. Viele reale Systeme lassen sich jedoch nicht durch eine einzelne Variable beschreiben. Stattdessen existieren mehrere gekoppelte Größen, deren zeitliche Änderungen voneinander abhängen. Ein mechanisches System kann beispielsweise aus mehreren verbundenen Massen bestehen, oder ein elektrischer Schaltkreis kann mehrere Kondensatoren und Spulen enthalten. Solche gekoppelten Systeme erfordern mehrere Differentialgleichungen, die simultan erfüllt sein müssen.

Ein System von Differentialgleichungen ist eine Menge von zwei oder mehr Differentialgleichungen, die mehrere unbekannte Funktionen miteinander verknüpfen. Die gesuchten Funktionen hängen alle von derselben unabhängigen Variable ab, typischerweise der Zeit. Die Änderung jeder Funktion wird durch eine eigene Differentialgleichung beschrieben, die aber von den Werten aller anderen Funktionen abhängen kann.

Die allgemeine Form eines Systems von  $n$  gekoppelten Differentialgleichungen erster Ordnung lautet:

$$\begin{aligned}\dot{y}_1(t) &= f_1(t, y_1, y_2, \dots, y_n) \\ \dot{y}_2(t) &= f_2(t, y_1, y_2, \dots, y_n) \\ &\vdots \\ \dot{y}_n(t) &= f_n(t, y_1, y_2, \dots, y_n)\end{aligned}\tag{1}$$

Jede Gleichung gibt die zeitliche Ableitung einer Funktion  $y_i$  als Funktion der Zeit und aller Zustandsvariablen an. Die Kopplung entsteht dadurch, dass die rechte Seite jeder Gleichung nicht nur von  $y_i$  selbst, sondern auch von den anderen Variablen abhängen kann.

## Vektorschreibweise

Die Notation für Systeme von Differentialgleichungen lässt sich erheblich vereinfachen, wenn man Vektoren verwendet. Wir fassen alle unbekannt Funktionen in einem Vektor zusammen:

$$\mathbf{y}(t) = \begin{pmatrix} y_1(t) \\ y_2(t) \\ \vdots \\ y_n(t) \end{pmatrix}$$

Ebenso fassen wir die Funktionen auf der rechten Seite zu einem Vektorfeld zusammen:

$$\mathbf{f}(t, \mathbf{y}) = \begin{pmatrix} f_1(t, y_1, \dots, y_n) \\ f_2(t, y_1, \dots, y_n) \\ \vdots \\ f_n(t, y_1, \dots, y_n) \end{pmatrix}$$

Mit dieser Notation können wir das gesamte System kompakt als eine einzige Vektorgleichung schreiben:

$$\dot{\mathbf{y}}(t) = \mathbf{f}(t, \mathbf{y}(t))\tag{2}$$

Diese Vektorschreibweise ist nicht nur kompakter, sondern erleichtert auch die theoretische Analyse und die numerische Lösung. Viele Eigenschaften und Methoden, die wir für einzelne Differentialgleichungen entwickelt haben, lassen sich auf diese Vektorform übertragen.

### Anwendungsgebiete von Differentialgleichungssystemen

Systeme von Differentialgleichungen treten in nahezu allen Bereichen der Naturwissenschaften und Technik auf:

**Mechanik:** Bewegung gekoppelter Massen, etwa bei Molekülen oder bei verbundenen Fahrzeugen. Jede Masse beeinflusst durch Kräfte die Bewegung der anderen.

**Elektrotechnik:** Schaltkreise mit mehreren Energiespeichern wie Kondensatoren und Spulen. Die Spannungen und Ströme in verschiedenen Zweigen sind durch die Kirchhoffschen Gesetze gekoppelt.

**Biologie:** Gekoppelte Populationen werden durch Systeme von Differentialgleichungen beschrieben. Das klassische Räuber-Beute-Modell ist ein Beispiel, bei dem die Größe der Räuberpopulation von der Beutepopulation abhängt und umgekehrt.

**Chemie:** Gekoppelte Reaktionsgleichungen beschreiben komplexe Reaktionsnetzwerke mit mehreren beteiligten Spezies. Die Konzentrationen verschiedener Molekülararten beeinflussen sich gegenseitig durch chemische Reaktionen.

**Wirtschaftswissenschaften:** Modellierung wechselwirkender Märkte, bei denen Angebot und Nachfrage in verschiedenen Sektoren voneinander abhängen.

Die Gemeinsamkeit all dieser Anwendungen ist, dass mehrere Größen existieren, die sich gegenseitig beeinflussen und daher nur gemeinsam verstanden werden können.

## Reduktion höherer Ordnung auf Systeme erster Ordnung

Eine einzelne Differentialgleichung höherer Ordnung lässt sich immer in ein System von Differentialgleichungen erster Ordnung umwandeln. Dies ist von fundamentaler Bedeutung, da theoretische Sätze und numerische Verfahren typischerweise für Systeme erster Ordnung formuliert sind.

Die Grundidee der Reduktion besteht darin, für jede Ableitung eine neue Variable einzuführen. Betrachten wir eine Differentialgleichung  $n$ -ter Ordnung für die Funktion  $x(t)$ . Wir definieren neue Funktionen:

$$y_1 = x, \quad y_2 = \dot{x}, \quad y_3 = \ddot{x}, \quad \dots, \quad y_n = x^{(n-1)}$$

Jede neue Variable ist die Ableitung der vorhergehenden. Damit wird die ursprüngliche Gleichung  $n$ -ter Ordnung zu einem System von  $n$  Gleichungen erster Ordnung. Die ersten  $n - 1$  Gleichungen sind trivial und ergeben sich aus den Definitionen. Die letzte Gleichung entspricht der ursprünglichen Differentialgleichung, nur ausgedrückt durch die neuen Variablen.

Diese Umwandlung ist nicht eindeutig, da es viele Möglichkeiten gibt, neue Variablen zu definieren. Alle diese Möglichkeiten führen jedoch zum selben dynamischen Verhalten, nur beschrieben in unterschiedlichen Koordinaten. Die Wahl der Variablen kann die Analyse vereinfachen oder physikalische Größen direkt sichtbar machen.

Die Reduktion auf ein System erster Ordnung hat mehrere wichtige Konsequenzen. Numerische Lösungsverfahren wie die Runge-Kutta-Methoden sind für Systeme erster Ordnung entwickelt worden. Die Phasenraumanalyse, die eine geometrische Interpretation der Dynamik ermöglicht, funktioniert ebenfalls nur für Systeme erster Ordnung. Theoretische Konzepte wie Stabilität und Bifurkationen werden typischerweise im Rahmen von Systemen erster Ordnung formuliert.

## Der gedämpfte harmonische Oszillator als System

Der gedämpfte harmonische Oszillator ist ein ideales Beispiel, um die Reduktion einer Differentialgleichung zweiter Ordnung auf ein System erster Ordnung zu illustrieren. Die Bewegungsgleichung des Oszillators lautet:

$$m\ddot{x}(t) + c\dot{x}(t) + kx(t) = F(t) \quad (3)$$

Hierbei bezeichnet  $x(t)$  die Auslenkung,  $\dot{x}(t)$  die Geschwindigkeit und  $\ddot{x}(t)$  die Beschleunigung. Die Parameter  $m$ ,  $c$  und  $k$  sind Masse, Dämpfungskoeffizient und Federkonstante. Die Funktion  $F(t)$  beschreibt eine äußere Kraft.

Um diese Gleichung zweiter Ordnung in ein System erster Ordnung zu überführen, definieren wir zwei neue Variablen:

$$\begin{aligned} y_1(t) &= x(t) \\ y_2(t) &= \dot{x}(t) \end{aligned} \quad (4)$$

Die erste Variable ist die Auslenkung, die zweite die Geschwindigkeit. Diese Wahl ist physikalisch natürlich, da beide Größen direkt messbare physikalische Bedeutung haben.

Aus der Definition von  $y_2$  folgt unmittelbar die erste Gleichung des Systems:

$$\dot{y}_1(t) = y_2(t) \quad (5)$$

Die zweite Gleichung erhalten wir, indem wir die ursprüngliche Bewegungsgleichung nach  $\ddot{x}$  auflösen und die neuen Variablen einsetzen:

$$\ddot{x}(t) = \frac{1}{m}[F(t) - c\dot{x}(t) - kx(t)]$$

Mit  $\ddot{x} = \dot{y}_2$ ,  $\dot{x} = y_2$  und  $x = y_1$  wird dies zu:

$$\dot{y}_2(t) = -\frac{k}{m}y_1(t) - \frac{c}{m}y_2(t) + \frac{1}{m}F(t) \quad (6)$$

Zusammengefasst erhalten wir das System:

$$\begin{aligned} \dot{y}_1(t) &= y_2(t) \\ \dot{y}_2(t) &= -\frac{k}{m}y_1(t) - \frac{c}{m}y_2(t) + \frac{1}{m}F(t) \end{aligned} \quad (7)$$

Dies ist ein System von zwei gekoppelten Differentialgleichungen erster Ordnung. Die Kopplung ist einseitig: Die erste Gleichung hängt nur von  $y_2$  ab, während die zweite Gleichung von beiden Variablen abhängt.

## Matrixschreibweise

Das System lässt sich auch in Matrixform schreiben. Wir definieren den Zustandsvektor und die Systemmatrix:

$$\mathbf{y} = \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \end{pmatrix}, \quad A = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -\frac{k}{m} & -\frac{c}{m} \end{pmatrix}$$

Der externe Antrieb wird durch einen Vektor dargestellt:

$$\mathbf{b} = \begin{pmatrix} 0 \\ \frac{1}{m} \end{pmatrix}$$

Damit lautet das System in kompakter Form:

$$\dot{\mathbf{y}} = A\mathbf{y} + \mathbf{b}F(t) \quad (8)$$

Diese Matrixschreibweise zeigt die lineare Struktur des Systems. Die Matrix  $A$  charakterisiert die Eigenschwingungen des Systems, während der Vektor  $\mathbf{b}$  beschreibt, wie die äußere Kraft auf das System wirkt.

## Der ungedämpfte Fall

Für einen ungedämpften Oszillator ohne äußere Kraft vereinfacht sich das System erheblich. Mit  $c = 0$  und  $F(t) = 0$  erhalten wir:

$$\begin{aligned} \dot{y}_1 &= y_2 \\ \dot{y}_2 &= -\omega_0^2 y_1 \end{aligned} \quad (9)$$

Hierbei ist  $\omega_0 = \sqrt{k/m}$  die Eigenfrequenz des Oszillators. Dieses System ist besonders einfach und lässt sich analytisch lösen. Die Lösung ist:

$$\begin{aligned} y_1(t) &= A \cos(\omega_0 t + \phi) \\ y_2(t) &= -A\omega_0 \sin(\omega_0 t + \phi) \end{aligned} \quad (10)$$

Die Amplitude  $A$  und die Phase  $\phi$  werden durch die Anfangsbedingungen bestimmt. Die Lösung beschreibt eine harmonische Schwingung, bei der Auslenkung und Geschwindigkeit phasenverschoben oszillieren.

## Die Phasenebene

Die Phasenebene ist ein mächtiges Werkzeug zur geometrischen Analyse von Systemen mit zwei Variablen. Statt die Funktionen  $y_1(t)$  und  $y_2(t)$  separat als Funktion der Zeit zu betrachten, stellt man sie gemeinsam in einem zweidimensionalen Diagramm dar.

In der Phasenebene wird eine Achse der Variablen  $y_1$  und die andere Achse der Variablen  $y_2$  zugeordnet. Ein Punkt in dieser Ebene repräsentiert einen vollständigen Zustand des Systems zu einem bestimmten Zeitpunkt. Die zeitliche Entwicklung des Systems wird durch eine Kurve in der Phasenebene dargestellt, die man Trajektorie nennt.

Die Phasenebene macht den Begriff des Zustands anschaulich. Zu jedem Zeitpunkt befindet sich das System in einem bestimmten Zustand, der durch die Werte von  $y_1$  und  $y_2$  vollständig charakterisiert ist. Die Kenntnis dieser beiden Werte zu einem Zeitpunkt reicht aus, um die gesamte zukünftige Entwicklung vorherzusagen, sofern das System deterministisch ist.

## Trajektorien und ihre Eigenschaften

Eine Trajektorie in der Phasenebene ist die Menge aller Punkte, die das System im Laufe der Zeit durchläuft. Sie beginnt am Anfangszustand und entwickelt sich gemäß den Differentialgleichungen. Die Form der Trajektorie verrät viel über das Verhalten des Systems.

Für den ungedämpften harmonischen Oszillator sind die Trajektorien geschlossene Kurven. Genauer gesagt sind es Ellipsen, deren Achsen durch die Energie des Systems bestimmt werden. Das System kehrt periodisch zum Ausgangszustand zurück, was die konservative Natur des ungedämpften Oszillators widerspiegelt.

Beim gedämpften Oszillator sind die Trajektorien Spiralen, die zum Ursprung konvergieren. Die Dämpfung entzieht dem System Energie, sodass die Amplitude mit der Zeit abnimmt. Die Trajektorie nähert sich asymptotisch dem Gleichgewichtszustand bei  $(0, 0)$ , wo sowohl Auslenkung als auch Geschwindigkeit verschwinden.

## Das Vektorfeld

Die Differentialgleichungen definieren an jedem Punkt der Phasenebene einen Vektor, der die momentane Änderungsrichtung angibt. Dieser Vektor hat die Komponenten  $(\dot{y}_1, \dot{y}_2)$  und zeigt in die Richtung, in die sich das System von diesem Punkt aus bewegt.

Die Gesamtheit aller dieser Vektoren nennt man das Vektorfeld des Systems. Eine Trajektorie ist eine Kurve, deren Tangente an jedem Punkt mit dem dort definierten Vektor übereinstimmt. Die Trajektorie folgt dem Strömungsfeld, das durch die Differentialgleichungen vorgegeben wird.

Das Vektorfeld erlaubt eine qualitative Analyse des Systems, auch ohne explizite Lösungen zu kennen. Man kann erkennen, in welche Richtungen sich das System von verschiedenen Anfangszuständen aus entwickelt. Regionen, in denen die Vektoren zum Ursprung zeigen, entsprechen stabilen Bereichen. Regionen mit nach außen zeigenden Vektoren sind instabil.

## Lineare Systeme mit konstanten Koeffizienten

Eine besonders wichtige Klasse von Systemen sind die linearen Systeme mit konstanten Koeffizienten. Ein solches System hat die Form:

$$\dot{\mathbf{y}} = A\mathbf{y} + \mathbf{b}(t) \quad (11)$$

Hierbei ist  $A$  eine konstante Matrix und  $\mathbf{b}(t)$  ein zeitabhängiger Vektor, der externe Einflüsse beschreibt. Die Linearität bedeutet, dass die rechte Seite eine lineare Funktion des Zustandsvektors  $\mathbf{y}$  ist.

Lineare Systeme sind deshalb wichtig, weil sie sich systematisch analysieren lassen. Im Gegensatz zu nichtlinearen Systemen, deren Verhalten sehr komplex sein kann, folgen lineare Systeme einfachen und gut verstandenen Regeln. Viele der mathematischen Werkzeuge, die für einzelne lineare Differentialgleichungen entwickelt wurden, lassen sich auf lineare Systeme verallgemeinern.

### Homogene lineare Systeme

Wenn der externe Antrieb verschwindet, also  $\mathbf{b}(t) = \mathbf{0}$ , spricht man von einem homogenen linearen System:

$$\dot{\mathbf{y}} = A\mathbf{y} \quad (12)$$

Die Lösung eines solchen Systems kann mit der Matrix-Exponentialfunktion ausgedrückt werden:

$$\mathbf{y}(t) = e^{At}\mathbf{y}_0 \quad (13)$$

Die Matrix-Exponentialfunktion  $e^{At}$  ist analog zur gewöhnlichen Exponentialfunktion definiert, aber für Matrizen. Sie kann durch eine Potenzreihe dargestellt werden:

$$e^{At} = I + At + \frac{(At)^2}{2!} + \frac{(At)^3}{3!} + \dots \quad (14)$$

In der Praxis berechnet man die Matrix-Exponentialfunktion nicht über diese Reihe, sondern nutzt die Eigenwerte und Eigenvektoren der Matrix  $A$ .

## Rolle der Eigenwerte

Die Eigenwerte der Systemmatrix  $A$  bestimmen das qualitative Verhalten des Systems vollständig. Ein Eigenwert  $\lambda$  mit zugehörigem Eigenvektor  $\mathbf{v}$  erfüllt die Gleichung:

$$A\mathbf{v} = \lambda\mathbf{v} \quad (15)$$

Für jeden Eigenwert existiert eine spezielle Lösung der Form:

$$\mathbf{y}(t) = e^{\lambda t}\mathbf{v} \quad (16)$$

Diese Lösung wächst exponentiell, falls der Realteil von  $\lambda$  positiv ist. Sie klingt exponentiell ab, falls der Realteil negativ ist. Für rein imaginäre Eigenwerte oszilliert die Lösung ohne zu wachsen oder abzuklingen.

Die allgemeine Lösung des homogenen Systems ist eine Linearkombination dieser speziellen Lösungen. Das Langzeitverhalten wird durch den Eigenwert mit dem größten Realteil dominiert. Sind alle Realteile negativ, konvergiert jede Lösung gegen null. Ist mindestens ein Realteil positiv, existieren Lösungen, die unbegrenzt wachsen.

## Stabilität

Die Eigenwerte bestimmen auch die Stabilität des Gleichgewichts. Ein Gleichgewichtspunkt ist ein Zustand, an dem  $\dot{\mathbf{y}} = \mathbf{0}$  gilt. Für ein homogenes lineares System ist der Ursprung  $\mathbf{y} = \mathbf{0}$  immer ein Gleichgewichtspunkt.

Das Gleichgewicht heißt stabil, wenn Trajektorien, die in seiner Nähe starten, dort bleiben. Es heißt asymptotisch stabil, wenn diese Trajektorien sogar zum Gleichgewicht konvergieren. Das Gleichgewicht ist instabil, wenn es Trajektorien gibt, die sich vom Gleichgewicht entfernen.

Für lineare Systeme gilt eine einfache Stabilitätsbedingung: Das Gleichgewicht ist asymptotisch stabil genau dann, wenn alle Eigenwerte negative Realteile haben. Es ist instabil, wenn mindestens ein Eigenwert einen positiven Realteil hat. Der Grenzfall mit Eigenwerten auf der imaginären Achse entspricht marginaler Stabilität.

## Zusammenfassung

Systeme von Differentialgleichungen erweitern das Konzept einzelner Differentialgleichungen auf mehrere gekoppelte Variablen. Jede Differentialgleichung höherer Ordnung lässt sich in ein System von Gleichungen erster Ordnung überführen. Diese Reduktion ist fundamental für die numerische Lösung und die theoretische Analyse.

Die Vektorschreibweise ermöglicht eine kompakte Darstellung und macht die mathematische Struktur deutlich. Für lineare Systeme mit konstanten Koeffizienten spielen die Eigenwerte der Systemmatrix eine zentrale Rolle. Sie bestimmen das qualitative Verhalten und die Stabilität des Systems.

Die Phasenebene bietet eine geometrische Interpretation für Systeme mit zwei Variablen. Trajektorien in der Phasenebene visualisieren die zeitliche Entwicklung und machen Eigenschaften wie Stabilität und periodisches Verhalten anschaulich. Das Vektorfeld zeigt die lokale Dynamik an jedem Punkt und ermöglicht qualitative Schlussfolgerungen über das Systemverhalten.