

Konzepte

i Lernziele

Die Studierenden sollen...

- ... das Variationsprinzip formulieren und den Unterschied zwischen Funktionen und Funktionalen erklären können.
- ... die Euler-Lagrange-Gleichung aus dem Variationsprinzip ableiten können.
- ... Variationsprobleme mit einer oder mehreren Variablen lösen und physikalische Bedeutungen interpretieren können.

Einführung in die Variationsrechnung

Die Variationsrechnung ist eines der elegantesten und mächtigsten Werkzeuge der mathematischen Physik. Sie beantwortet eine fundamentale Frage, die weit über die klassische Analysis hinausgeht: Welche Funktion optimiert ein gegebenes Integral? Während in der klassischen Analysis nach dem Minimum einer Zahl gesucht wird, sucht die Variationsrechnung nach der optimalen Form einer Kurve oder Funktion.

Dieses Gebiet der Mathematik hat weitreichende Anwendungen in der Physik. Von der klassischen Mechanik über die Optik bis hin zur Quantenmechanik und der allgemeinen Relativitätstheorie bilden Variationsprinzipien das theoretische Fundament. Die Variationsrechnung ermöglicht es, komplexe physikalische Gesetze aus einem einzigen grundlegenden Prinzip abzuleiten.

Motivation: Von Funktionen zu Funktionalen

In der klassischen Analysis suchen wir nach Extrema von Funktionen $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$. Das Problem lautet, ein $x \in \mathbb{R}$ zu finden, das $f(x)$ minimiert oder maximiert. Die notwendige Bedingung für ein lokales Extremum ist dabei die Gleichung $f'(x) = 0$.

In der Variationsrechnung erweitern wir dieses Konzept auf eine höhere Ebene. Wir betrachten Funktionale $J : \mathcal{F} \rightarrow \mathbb{R}$, die einem Element aus einem Funktionenraum \mathcal{F} eine reelle Zahl zuordnen. Das Variationsproblem besteht darin, diejenige Funktion $y \in \mathcal{F}$ zu finden, die das Funktional $J[y]$ minimiert oder maximiert.

Ein typisches Funktional hat die Form eines Integrals über eine Funktion $y(t)$ und ihre Ableitung. Anstatt also nach einem optimalen Zahlenwert zu suchen, suchen wir nach einer optimalen Funktionsform. Dieser Übergang von der Optimierung diskreter Variablen zur Optimierung ganzer Funktionen eröffnet neue mathematische Möglichkeiten und physikalische Einsichten.

Das Variationsprinzip

Das zentrale Konzept der Variationsrechnung ist die Idee der Variation. Eine Variation beschreibt eine kleine Änderung oder Störung einer gegebenen Funktion. Durch systematische Untersuchung solcher Variationen lassen sich notwendige Bedingungen für Extrema von Funktionalen herleiten.

Definition einer Variation

Sei $y^*(t)$ eine Funktion, die wir auf Extremalität untersuchen möchten. Eine Variation dieser Funktion wird durch eine Störungsfunktion $\eta(t)$ und einen kleinen Parameter ε beschrieben. Die Familie variiertter Funktionen lautet:

$$y(t; \varepsilon) = y^*(t) + \varepsilon\eta(t) \quad (1)$$

Die Störungsfunktion $\eta(t)$ muss an den Randpunkten des betrachteten Intervalls verschwinden, das heißt $\eta(a) = \eta(b) = 0$. Dies stellt sicher, dass alle variierten Funktionen dieselben Randbedingungen erfüllen wie die ursprüngliche Funktion $y^*(t)$.

Entlang dieser Familie wird das Funktional zu einer gewöhnlichen Funktion des Parameters ε :

$$J(\varepsilon) = J[y^*(t) + \varepsilon\eta(t)] \quad (2)$$

Das Variationsproblem reduziert sich damit auf die Untersuchung dieser Funktion $J(\varepsilon)$ in der Umgebung von $\varepsilon = 0$.

Das Variationsprinzip als notwendige Bedingung

Eine Funktion $y^*(t)$ ist ein stationärer Punkt des Funktional $J[y]$, wenn die Ableitung von $J(\varepsilon)$ nach ε an der Stelle $\varepsilon = 0$ verschwindet:

$$\left. \frac{dJ}{d\varepsilon} \right|_{\varepsilon=0} = 0 \quad (3)$$

Diese Bedingung muss für alle zulässigen Variationen $\eta(t)$ erfüllt sein. Sie ist das Analogon zur Bedingung $f'(x) = 0$ aus der klassischen Analysis und stellt eine notwendige, aber nicht hinreichende Bedingung für ein Extremum dar.

Die Ableitung nach ε an der Stelle $\varepsilon = 0$ wird auch erste Variation des Funktional genannt und mit δJ bezeichnet:

$$\delta J = \left. \frac{dJ}{d\varepsilon} \right|_{\varepsilon=0} \quad (4)$$

Das Verschwinden der ersten Variation charakterisiert stationäre Punkte des Funktional. Diese können Minima, Maxima oder Sattelpunkte sein.

Die Euler-Lagrange-Gleichung

Die wichtigste Erkenntnis der Variationsrechnung ist, dass das Variationsprinzip zu einer Differentialgleichung führt. Diese Differentialgleichung, die Euler-Lagrange-Gleichung, charakterisiert die stationären Punkte des Funktional und muss von jeder optimalen Funktion erfüllt werden.

Herleitung für ein einfaches Funktional

Betrachten wir das grundlegende Funktional:

$$J[y] = \int_a^b L(t, y, y') dt \quad (5)$$

Hierbei ist $L(t, y, y')$ die Lagrangefunktion, die von der unabhängigen Variablen t , der gesuchten Funktion y und ihrer Ableitung $y' = \frac{dy}{dt}$ abhängt. Die Wahl der Lagrangefunktion charakterisiert das spezifische Variationsproblem.

Entlang einer Variation $y = y^* + \varepsilon\eta$ wird das Funktional zu:

$$J(\varepsilon) = \int_a^b L(t, y^* + \varepsilon\eta, y'^* + \varepsilon\eta') dt \quad (6)$$

Um die erste Variation zu berechnen, differenzieren wir nach ε und setzen anschließend $\varepsilon = 0$. Nach der Kettenregel ergibt sich:

$$\delta J = \left. \frac{dJ}{d\varepsilon} \right|_{\varepsilon=0} = \int_a^b \left[\frac{\partial L}{\partial y} \eta + \frac{\partial L}{\partial y'} \eta' \right] dt \quad (7)$$

Der Term $\frac{\partial L}{\partial y'}$ wird mit der Ableitung η' multipliziert. Um diesen Ausdruck umzuformen, verwenden wir partielle Integration:

$$\int_a^b \frac{\partial L}{\partial y'} \eta' dt = \left[\frac{\partial L}{\partial y'} \eta \right]_a^b - \int_a^b \frac{d}{dt} \left(\frac{\partial L}{\partial y'} \right) \eta dt \quad (8)$$

Da die Variation an den Rändern verschwindet, $\eta(a) = \eta(b) = 0$, fällt der Randterm weg. Die erste Variation vereinfacht sich zu:

$$\delta J = \int_a^b \left[\frac{\partial L}{\partial y} - \frac{d}{dt} \left(\frac{\partial L}{\partial y'} \right) \right] \eta dt \quad (9)$$

Damit diese Variation für alle zulässigen Funktionen $\eta(t)$ verschwindet, muss der Ausdruck in den eckigen Klammern identisch null sein. Dies führt auf die Euler-Lagrange-Gleichung:

$$\frac{\partial L}{\partial y} - \frac{d}{dt} \left(\frac{\partial L}{\partial y'} \right) = 0 \quad (10)$$

Dies ist eine gewöhnliche Differentialgleichung zweiter Ordnung für die gesuchte Funktion $y(t)$. Jede Lösung dieser Differentialgleichung ist ein stationärer Punkt des Funktionals.

Struktur der Euler-Lagrange-Gleichung

Die Euler-Lagrange-Gleichung hat eine bemerkenswerte Struktur. Die partielle Ableitung $\frac{\partial L}{\partial y}$ beschreibt, wie die Lagrangefunktion direkt von der Funktion y abhängt. Die zweite Ableitung $\frac{d}{dt} \left(\frac{\partial L}{\partial y'} \right)$ enthält implizit zweite Ableitungen von y .

Wenn wir die totale Ableitung explizit ausführen, erhalten wir:

$$\frac{d}{dt} \left(\frac{\partial L}{\partial y'} \right) = \frac{\partial^2 L}{\partial t \partial y'} + \frac{\partial^2 L}{\partial y \partial y'} y' + \frac{\partial^2 L}{\partial y'^2} y'' \quad (11)$$

Die Euler-Lagrange-Gleichung wird damit zu einer Differentialgleichung zweiter Ordnung für $y(t)$. Zusammen mit zwei Randbedingungen, etwa $y(a) = y_a$ und $y(b) = y_b$, bildet dies ein Randwertproblem.

Funktionale mit mehreren Variablen

Die Variationsrechnung lässt sich auf Funktionale erweitern, die von mehreren Funktionen abhängen. Dies führt zu Systemen von Euler-Lagrange-Gleichungen, die gekoppelte Differentialgleichungen darstellen.

Mehrere unabhängige Funktionen

Betrachten wir ein Funktional, das von n Funktionen $y_1(t), \dots, y_n(t)$ abhängt:

$$J[y_1, \dots, y_n] = \int_a^b L(t, y_1, \dots, y_n, y_1', \dots, y_n') dt \quad (12)$$

Die Lagrangefunktion hängt nun von allen Funktionen und ihren Ableitungen ab. Um das Funktional zu minimieren, variieren wir jede Funktion unabhängig voneinander.

Für jede Funktion y_i ergibt die Variationsrechnung eine separate Euler-Lagrange-Gleichung:

$$\frac{\partial L}{\partial y_i} - \frac{d}{dt} \left(\frac{\partial L}{\partial y_i'} \right) = 0, \quad i = 1, \dots, n \quad (13)$$

Dies ist ein System von n gekoppelten gewöhnlichen Differentialgleichungen zweiter Ordnung. Die Kopplung entsteht durch die gemischten partiellen Ableitungen der Lagrangefunktion nach verschiedenen Variablen.

Solche Systeme treten häufig in der Physik auf, etwa in der Mechanik bei der Beschreibung von Systemen mit mehreren Freiheitsgraden. Jede Koordinate erfüllt ihre eigene Euler-Lagrange-Gleichung, aber die Gleichungen sind durch die Wechselwirkungen zwischen den Koordinaten miteinander verbunden.

Randbedingungen für Systeme

Für ein System von n Differentialgleichungen zweiter Ordnung benötigen wir $2n$ Randbedingungen. Typischerweise werden die Werte aller Funktionen an beiden Randpunkten vorgegeben:

$$y_i(a) = y_{i,a}, \quad y_i(b) = y_{i,b}, \quad i = 1, \dots, n \quad (14)$$

Das resultierende Randwertproblem besteht dann darin, Funktionen zu finden, die sowohl die n Euler-Lagrange-Gleichungen als auch die $2n$ Randbedingungen erfüllen.

Physikalische Interpretationen

Die Variationsrechnung ist nicht nur ein mathematisches Werkzeug, sondern spiegelt fundamentale Prinzipien der Physik wider. Viele physikalische Gesetze lassen sich als Variationsprinzipien formulieren, bei denen die Natur ein bestimmtes Funktional optimiert.

Das Prinzip der kleinsten Wirkung

In der klassischen Mechanik beschreibt die Lagrangefunktion die Dynamik eines Systems. Sie ist typischerweise definiert als die Differenz zwischen kinetischer und potentieller Energie:

$$L = T - V \quad (15)$$

Das Funktional, das als Wirkung bezeichnet wird, lautet:

$$S = \int_{t_1}^{t_2} L(t, q, \dot{q}) dt \quad (16)$$

Das Prinzip der kleinsten Wirkung besagt, dass die tatsächliche Bewegung eines Systems diejenige ist, die die Wirkung stationär macht. Die Euler-Lagrange-Gleichungen liefern dann die Bewegungsgleichungen des Systems.

Dieses Prinzip hat eine tiefe philosophische Bedeutung. Es besagt, dass die Natur in gewissem Sinne einen optimalen Weg zwischen zwei Zuständen wählt. Diese Perspektive führt zu einer völlig neuen Formulierung der Mechanik, die äquivalent zu Newtons Gesetzen ist, aber oft eleganter und allgemeiner.

Anwendungen in verschiedenen Bereichen der Physik

Die Variationsrechnung findet in nahezu allen Bereichen der Physik Anwendung und bildet ein fundamentales Prinzip für viele physikalische Theorien:

Optik: Das Fermatsche Prinzip beschreibt den Lichtweg als denjenigen Pfad, der die Laufzeit minimiert. Dies erklärt sowohl Reflexion als auch Brechung aus einem einzigen Prinzip.

Quantenmechanik: Variationsprinzipien bilden die Grundlage für Feynmans Pfadintegralformulierung. Die Wahrscheinlichkeitsamplitude wird durch ein Integral über alle möglichen Pfade berechnet, wobei jeder Pfad mit einem Phasenterm gewichtet wird, der von der klassischen Wirkung abhängt.

Allgemeine Relativitätstheorie: Geodäten sind die kürzesten Wege in gekrümmter Raumzeit. Die Bewegung freier Teilchen folgt diesen Geodäten, die durch ein Variationsprinzip charakterisiert werden. Auch die Einstein-Feldgleichungen selbst lassen sich aus einem Variationsprinzip ableiten.

Kontinuumsmechanik: Gleichgewichtszustände elastischer Körper werden durch die Minimierung der potentiellen Energie bestimmt. Die resultierenden Differentialgleichungen beschreiben Spannungen und Deformationen im Material.

Zusammenfassung

Die Variationsrechnung erweitert die klassische Optimierung von Funktionen auf die Optimierung von Funktionalen. Ein Funktional ordnet einer Funktion aus einem Funktionenraum eine reelle Zahl zu, typischerweise in Form eines Integrals.

Das grundlegende Werkzeug ist die Variation, eine kleine Störung der gesuchten Funktion. Eine Funktion ist ein stationärer Punkt eines Funktionals, wenn die erste Variation verschwindet. Diese Bedingung führt auf die Euler-Lagrange-Gleichung:

$$\frac{\partial L}{\partial y} - \frac{d}{dt} \left(\frac{\partial L}{\partial y'} \right) = 0 \quad (17)$$

Diese Differentialgleichung muss von jeder optimalen Funktion erfüllt werden. Für Funktionale mit mehreren abhängigen Funktionen erhält man ein System von gekoppelten Euler-Lagrange-Gleichungen.

Die Variationsrechnung bildet die mathematische Grundlage für fundamentale Prinzipien der Physik. Das Prinzip der kleinsten Wirkung in der Mechanik, das Fermatsche Prinzip in der Optik und Variationsprinzipien in der Quantenmechanik und Relativitätstheorie zeigen die universelle Bedeutung dieses mathematischen Formalismus. Die Natur scheint in vielen Fällen Extremalprinzipien zu folgen, die sich durch die Variationsrechnung mathematisch präzise formulieren lassen.