

# Beispiele

## Beispiel 1: Kürzeste Kurve zwischen zwei Punkten

Die fundamentalste Frage der Geometrie ist die nach der kürzesten Verbindung zwischen zwei Punkten. In der euklidischen Ebene scheint die Antwort offensichtlich zu sein: eine gerade Linie. Die Variationsrechnung ermöglicht es uns, diese intuitive Erkenntnis mathematisch rigoros zu beweisen und liefert gleichzeitig ein Modell für komplexere Probleme.

### Problemstellung

Gegeben seien zwei Punkte  $(a, y_a)$  und  $(b, y_b)$  in der Ebene. Wir suchen diejenige Kurve  $y(x)$ , die diese beiden Punkte verbindet und dabei die kleinste Bogenlänge aufweist. Dies ist das klassische Problem der kürzesten Verbindung.

Die Bogenlänge einer Kurve wird durch ein Integral über infinitesimale Längenelemente berechnet. Jedes Längenelement  $ds$  ergibt sich aus dem Satz des Pythagoras als:

$$ds = \sqrt{(dx)^2 + (dy)^2} = \sqrt{1 + \left(\frac{dy}{dx}\right)^2} dx \quad (1)$$

Die gesamte Bogenlänge zwischen den Punkten  $(a, y_a)$  und  $(b, y_b)$  ist dann:

$$s = \int_a^b \sqrt{1 + (y')^2} dx \quad (2)$$

Der Ausdruck  $\sqrt{1 + (y')^2}$  hat eine einfache geometrische Bedeutung. Er ist der Betrag des Tangentenvektors an die Kurve und misst, wie schnell die Kurve im Raum voranschreitet.

## Anwendung der Euler-Lagrange-Gleichung

Das Funktional für die kürzeste Kurve lautet:

$$J[y] = \int_a^b \sqrt{1 + (y')^2} \, dx \quad (3)$$

Die Lagrangefunktion ist damit:

$$L(x, y, y') = \sqrt{1 + (y')^2} \quad (4)$$

Um die Euler-Lagrange-Gleichung aufzustellen, benötigen wir die partiellen Ableitungen der Lagrangefunktion. Die Ableitung nach  $y$  ergibt:

$$\frac{\partial L}{\partial y} = 0 \quad (5)$$

Die Lagrangefunktion hängt nicht explizit von  $y$  ab, sondern nur von der Ableitung  $y'$ . Die partielle Ableitung nach  $y'$  lautet:

$$\frac{\partial L}{\partial y'} = \frac{y'}{\sqrt{1 + (y')^2}} \quad (6)$$

Die Euler-Lagrange-Gleichung wird zu:

$$\frac{d}{dx} \left( \frac{y'}{\sqrt{1 + (y')^2}} \right) = 0 \quad (7)$$

Diese Gleichung besagt, dass der Ausdruck  $\frac{y'}{\sqrt{1 + (y')^2}}$  konstant sein muss:

$$\frac{y'}{\sqrt{1 + (y')^2}} = c \quad (8)$$

wobei  $c$  eine Integrationskonstante ist.

## Lösung und Interpretation

Die Gleichung lässt sich nach  $y'$  auflösen. Quadrieren beider Seiten ergibt:

$$\frac{(y')^2}{1 + (y')^2} = c^2 \quad (9)$$

Umstellen nach  $y'$  führt auf:

$$(y')^2 = \frac{c^2}{1 - c^2} \quad (10)$$

Da der rechte Ausdruck konstant ist, muss auch  $y'$  konstant sein. Wir bezeichnen diese Konstante mit  $m$ :

$$y' = m \quad (11)$$

Integration liefert die allgemeine Lösung:

$$y(x) = mx + n \quad (12)$$

Dies ist die Gleichung einer geraden Linie. Die Konstanten  $m$  und  $n$  werden durch die Randbedingungen  $y(a) = y_a$  und  $y(b) = y_b$  bestimmt.

Die Variationsrechnung bestätigt damit die geometrische Intuition: Die kürzeste Verbindung zwischen zwei Punkten in der Ebene ist eine gerade Linie. Dieses scheinbar triviale Resultat demonstriert jedoch die Kraft der Methode und dient als Ausgangspunkt für komplexere Probleme, bei denen die Lösung nicht mehr offensichtlich ist.

## Beispiel 2: Das Brachistochron-Problem

Das Brachistochron-Problem ist eines der berühmtesten Probleme der Variationsrechnung. Es wurde 1696 von Johann Bernoulli als Herausforderung an die Mathematiker seiner Zeit gestellt und führte zur Entwicklung der systematischen Variationsrechnung.

### Problemstellung

Ein Teilchen gleitet reibungsfrei unter dem Einfluss der Schwerkraft von einem Punkt A zu einem tiefer gelegenen Punkt B. Die Frage lautet: Entlang welcher Kurve erreicht das Teilchen den Endpunkt in minimaler Zeit?

Der Name Brachistochron stammt aus dem Griechischen und bedeutet "kürzeste Zeit". Es handelt sich nicht um das Problem der kürzesten Kurve, sondern um das der schnellsten Verbindung. Diese beiden Probleme haben unterschiedliche Lösungen.

Die Schwerkraft beschleunigt das Teilchen kontinuierlich. Eine Kurve, die zunächst steil abfällt, ermöglicht es dem Teilchen, schnell Geschwindigkeit aufzubauen. Diese Geschwindigkeit kann dann genutzt werden, um den restlichen Weg zurückzulegen. Die optimale Kurve muss einen Kompromiss zwischen direktem Weg und schneller Beschleunigung finden.

## Herleitung des Funktionals

Um das Variationsproblem zu formulieren, müssen wir die Gesamtzeit als Funktional der Kurve ausdrücken. Dazu verwenden wir die Energieerhaltung und kinematische Beziehungen.

Die potentielle Energie des Teilchens in der Tiefe  $y$  unter dem Startpunkt wird in kinetische Energie umgewandelt. Aus der Energieerhaltung folgt:

$$mgy = \frac{1}{2}mv^2 \quad (13)$$

Die Geschwindigkeit in Abhängigkeit von der Tiefe  $y$  ist damit:

$$v = \sqrt{2gy} \quad (14)$$

Das infinitesimale Zeitelement ist das Verhältnis von zurückgelegter Strecke zu Geschwindigkeit:

$$dt = \frac{ds}{v} = \frac{\sqrt{1 + (y')^2}}{\sqrt{2gy}} dx \quad (15)$$

Die Gesamtzeit für die Reise von A nach B ergibt sich durch Integration:

$$T[y] = \int_0^a \frac{\sqrt{1 + (y')^2}}{\sqrt{2gy}} dx \quad (16)$$

Dies ist das zu minimierende Funktional. Die Lagrangefunktion lautet:

$$L(y, y') = \frac{\sqrt{1 + (y')^2}}{\sqrt{y}} \quad (17)$$

Eine Besonderheit dieser Lagrangefunktion ist, dass sie nicht explizit von der unabhängigen Variablen  $x$  abhängt. Dies führt zu einer Vereinfachung bei der Lösung.

## Anwendung der Euler-Lagrange-Gleichung

Wenn die Lagrangefunktion nicht explizit von der unabhängigen Variablen abhängt, existiert ein erstes Integral der Euler-Lagrange-Gleichung. Dieses erste Integral, auch als Beltrami-Identität bekannt, lautet:

$$L - y' \frac{\partial L}{\partial y'} = C \quad (18)$$

wobei  $C$  eine Konstante ist. Diese Erhaltungsgröße vereinfacht die Lösung erheblich, da sie eine Differentialgleichung erster Ordnung anstelle einer zweiten Ordnung liefert.

Für unsere spezielle Lagrangefunktion berechnen wir zunächst:

$$\frac{\partial L}{\partial y'} = \frac{y'}{\sqrt{y}\sqrt{1+(y')^2}} \quad (19)$$

Einsetzen in die Beltrami-Identität ergibt:

$$\frac{\sqrt{1+(y')^2}}{\sqrt{y}} - y' \cdot \frac{y'}{\sqrt{y}\sqrt{1+(y')^2}} = C \quad (20)$$

Nach algebraischer Umformung erhält man:

$$\frac{1}{\sqrt{y(1+(y')^2)}} = C \quad (21)$$

Diese Gleichung lässt sich umstellen zu:

$$1 + (y')^2 = \frac{1}{C^2 y} \quad (22)$$

## Die Zykloide als Lösung

Die Lösung dieser Differentialgleichung ist eine Zykloide. Eine Zykloide ist die Kurve, die ein Punkt auf dem Umfang eines Rades beschreibt, das auf einer geraden Linie ohne zu rutschen rollt.

Die parametrische Darstellung der Zykloide lautet:

$$x(\theta) = \frac{R}{2}(\theta - \sin \theta), \quad y(\theta) = \frac{R}{2}(1 - \cos \theta) \quad (23)$$

Hierbei ist  $\theta$  der Rollwinkel des Rades und  $R$  der Raddurchmesser. Der Parameter  $R$  wird durch die Randbedingungen bestimmt, das heißt durch die Positionen der Punkte A und B.

## Geometrische Interpretation und physikalische Bedeutung

Die Zykloide hat bemerkenswerte Eigenschaften, die sie zur optimalen Lösung machen. Am Anfang ist die Kurve sehr steil, nahezu vertikal. Dies ermöglicht es dem Teilchen, schnell Geschwindigkeit aufzubauen.

Im weiteren Verlauf flacht die Kurve ab. Das Teilchen nutzt die zuvor gewonnene hohe Geschwindigkeit, um auch die horizontale Strecke effizient zurückzulegen. Der Gewinn an Geschwindigkeit durch den steilen Anfang kompensiert die längere Wegstrecke.

Vergleicht man die Brachistochron mit einer geraden Linie oder einem Kreisbogen, zeigt sich, dass die Zykloide tatsächlich zu einer kürzeren Reisezeit führt, obwohl der zurückgelegte Weg länger ist. Der Schlüssel liegt in der optimalen Ausnutzung der Gravitation zur Beschleunigung.

Dieses Problem illustriert eine wichtige Lektion: Die kürzeste Verbindung ist nicht immer die schnellste. Die Natur wählt den Weg, der das relevante Funktional optimiert. Im Fall der Gravitation ist dies die Zeit, nicht die Strecke. Die Variationsrechnung macht diese Optimierung mathematisch präzise und berechenbar.