

Beispiele

Beispiel 1: Mechanisches System — Masse an einer Feder

Das einfachste mechanische System, das sich mit der Lagrangeschen Mechanik behandeln lässt, ist eine Masse, die an einer Feder befestigt ist. Dieses System dient als Prototyp für harmonische Oszillationen und demonstriert die grundlegenden Konzepte der Lagrangeschen Formulierung.

Aufstellen der Lagrangefunktion

Die kinetische Koenergie einer Masse m , die sich mit der Geschwindigkeit \dot{x} bewegt, ist:

$$T^* = \frac{1}{2}m\dot{x}^2 \quad (1)$$

Die potentielle Energie einer Feder mit Federkonstante k und Auslenkung x aus der Ruhelage ist:

$$V = \frac{1}{2}kx^2 \quad (2)$$

Die Lagrangefunktion ergibt sich als Differenz zwischen kinetischer Koenergie und potentieller Energie:

$$L(x, \dot{x}) = \frac{1}{2}m\dot{x}^2 - \frac{1}{2}kx^2 \quad (3)$$

Diese einfache quadratische Form in beiden Variablen charakterisiert das lineare Verhalten des harmonischen Oszillators.

Herleitung der Bewegungsgleichung

Um die Euler-Lagrange-Gleichung anzuwenden, berechnen wir zunächst die partiellen Ableitungen der Lagrangefunktion. Die Ableitung nach der Position x ergibt:

$$\frac{\partial L}{\partial x} = -kx \quad (4)$$

Die Ableitung nach der Geschwindigkeit \dot{x} lautet:

$$\frac{\partial L}{\partial \dot{x}} = m\dot{x} \quad (5)$$

Die zeitliche Ableitung dieser Größe ist:

$$\frac{d}{dt} \left(\frac{\partial L}{\partial \dot{x}} \right) = m\ddot{x} \quad (6)$$

Die Euler-Lagrange-Gleichung $\frac{\partial L}{\partial x} - \frac{d}{dt} \left(\frac{\partial L}{\partial \dot{x}} \right) = 0$ wird damit zu:

$$-kx - m\ddot{x} = 0 \quad (7)$$

Umstellen ergibt die bekannte Bewegungsgleichung des harmonischen Oszillators:

$$m\ddot{x} + kx = 0 \quad (8)$$

Dies ist eine lineare Differentialgleichung zweiter Ordnung, deren Lösungen harmonische Oszillationen mit der Kreisfrequenz $\omega = \sqrt{k/m}$ beschreiben.

Erweiterung: Gedämpfter Oszillator

In der Realität unterliegen mechanische Systeme immer einer gewissen Dämpfung durch Reibung. Um dies zu beschreiben, führen wir die Rayleigh-Dissipationsfunktion ein:

$$\mathcal{D} = \frac{1}{2}c\dot{x}^2 \quad (9)$$

wobei c die Dämpfungskonstante ist. Die partielle Ableitung nach der Geschwindigkeit ergibt:

$$\frac{\partial \mathcal{D}}{\partial \dot{x}} = c\dot{x} \quad (10)$$

Die modifizierte Euler-Lagrange-Gleichung mit Dissipation lautet:

$$\frac{\partial L}{\partial x} - \frac{d}{dt} \left(\frac{\partial L}{\partial \dot{x}} \right) = \frac{\partial \mathcal{D}}{\partial \dot{x}} \quad (11)$$

Einsetzen der Ableitungen ergibt:

$$m\ddot{x} + c\dot{x} + kx = 0 \quad (12)$$

Dies ist die Bewegungsgleichung des gedämpften harmonischen Oszillators. Die Dämpfung führt zu einem exponentiellen Abklingen der Schwingungsamplitude.

Darstellung als System erster Ordnung

Für die numerische Integration und die Analyse der Dynamik ist es oft vorteilhaft, die Differentialgleichung zweiter Ordnung in ein System erster Ordnung umzuwandeln. Wir führen die neuen Variablen ein:

$$y_1 = x, \quad y_2 = \dot{x} \quad (13)$$

Das System erster Ordnung lautet dann:

$$\begin{aligned} \dot{y}_1 &= y_2 \\ \dot{y}_2 &= -\frac{k}{m}y_1 - \frac{c}{m}y_2 \end{aligned} \quad (14)$$

Diese Form macht die Struktur des dynamischen Systems explizit und eignet sich gut für die Phasenraumanalyse.

Beispiel 2: Elektrisches System — LC-Schaltkreis mit Widerstand

Elektrische Schaltkreise mit Induktivitäten, Kapazitäten und Widerständen bilden ein wichtiges Anwendungsgebiet der Lagrangeschen Mechanik. Die mathematische Beschreibung ist strukturell identisch mit mechanischen Oszillatoren, was die tiefe Analogie zwischen beiden Systemen offenbart.

Lagrangefunktion für elektromagnetische Systeme

Für einen LC-Schaltkreis definieren wir die Lagrangefunktion in Analogie zum mechanischen Oszillator. Die Zustandsvariable ist die Ladung Q auf dem Kondensator, und ihre Zeitableitung $\dot{Q} = I$ ist der Strom.

Die kinetische Koenergie entspricht der magnetischen Energie, die in der Induktivität gespeichert ist:

$$T^* = \frac{1}{2}LI^2 = \frac{1}{2}L\dot{Q}^2 \quad (15)$$

Die potentielle Energie entspricht der elektrischen Energie im Kondensator:

$$V = \frac{1}{2} \frac{Q^2}{C} \quad (16)$$

Die Lagrangefunktion des LC-Schaltkreises ist:

$$L(Q, \dot{Q}) = \frac{1}{2} L \dot{Q}^2 - \frac{1}{2} \frac{Q^2}{C} \quad (17)$$

Diese Form ist identisch mit der des mechanischen Oszillators, wenn man die Ersetzung $x \rightarrow Q$, $m \rightarrow L$ und $k \rightarrow 1/C$ vornimmt.

Herleitung der Schwingungsgleichung

Die partiellen Ableitungen der Lagrangefunktion sind:

$$\frac{\partial L}{\partial Q} = -\frac{Q}{C}, \quad \frac{\partial L}{\partial \dot{Q}} = L \dot{Q} \quad (18)$$

Die Euler-Lagrange-Gleichung ergibt:

$$L \ddot{Q} + \frac{Q}{C} = 0 \quad (19)$$

Dies ist die Schwingungsgleichung des LC-Kreises. Die Ladung und der Strom oszillieren harmonisch mit der Resonanzfrequenz $\omega = 1/\sqrt{LC}$.

Einbeziehung des Widerstands

Reale elektrische Schaltkreise enthalten immer einen gewissen ohmschen Widerstand, der zu Energieverlusten führt. Dies wird durch die Rayleigh-Dissipationsfunktion beschrieben:

$$\mathcal{D} = \frac{1}{2} R \dot{Q}^2 \quad (20)$$

Der Widerstand R spielt die gleiche Rolle wie die Dämpfungskonstante c im mechanischen System. Die partielle Ableitung ergibt:

$$\frac{\partial \mathcal{D}}{\partial \dot{Q}} = R \dot{Q} \quad (21)$$

Die Bewegungsgleichung des RLC-Schaltkreises lautet damit:

$$L \ddot{Q} + R \dot{Q} + \frac{Q}{C} = 0 \quad (22)$$

Vergleich der mechanischen und elektrischen Gleichungen

Die Gegenüberstellung der Bewegungsgleichungen zeigt die perfekte Analogie:

Für das mechanische System gilt:

$$m\ddot{x} + c\dot{x} + kx = 0 \quad (23)$$

Für das elektrische System gilt:

$$L\ddot{Q} + R\dot{Q} + \frac{Q}{C} = 0 \quad (24)$$

Beide Gleichungen haben exakt dieselbe mathematische Form. Die Zuordnung der Parameter ist:

Die Masse m entspricht der Induktivität L , beide beschreiben die Trägheit des Systems. Die Dämpfungskonstante c entspricht dem Widerstand R , beide führen zu Energiedissipation. Die Federkonstante k entspricht dem reziproken Wert der Kapazität $1/C$, beide charakterisieren eine lineare Rückstellkraft.

Diese Analogie ist nicht zufällig, sondern folgt direkt aus der identischen Struktur der Lagrange-funktionen beider Systeme.

Beispiel 3: Elektromechanisches System — Schallwandler

Elektromechanische Wandler wie Lautsprecher oder Mikrofone kombinieren mechanische und elektrische Freiheitsgrade in einem gekoppelten System. Die Lagrangesche Formulierung bietet einen eleganten Zugang zur Beschreibung solcher hybriden Systeme.

Lagrangefunktion für gekoppelte Systeme

Ein elektromechanischer Wandler besteht aus einer beweglichen Masse, die an eine Feder gekoppelt ist, und einem elektrischen Schaltkreis. Die Kopplung zwischen den beiden Subsystemen wird durch einen Kopplungsterm in der Lagrangefunktion beschrieben.

Eine geeignete Lagrangefunktion für ein elektromechanisches System lautet:

$$L(x, \dot{x}, Q, \dot{Q}) = \frac{1}{2}m\dot{x}^2 - \frac{1}{2}kx^2 + \frac{1}{2}L\dot{Q}^2 - \frac{1}{2}\frac{Q^2}{C} - \alpha x\dot{Q} \quad (25)$$

Die ersten vier Terme beschreiben die isolierten mechanischen und elektrischen Subsysteme. Der letzte Term $-\alpha x\dot{Q}$ ist der Kopplungsterm, wobei α der Kopplungskoeffizient ist. Dieser Term koppelt die mechanische Position mit dem elektrischen Strom.

Die Rayleigh-Dissipationsfunktion für das gekoppelte System enthält Beiträge von beiden Subsystemen:

$$\mathcal{D} = \frac{1}{2}c\dot{x}^2 + \frac{1}{2}R\dot{Q}^2 \quad (26)$$

Mechanische Reibung und elektrischer Widerstand tragen unabhängig zur Energiedissipation bei.

Herleitung der gekoppelten Bewegungsgleichungen

Wir wenden die Euler-Lagrange-Gleichungen separat für die mechanische Koordinate x und die elektrische Koordinate Q an. Für die mechanische Koordinate erhalten wir die partiellen Ableitungen:

$$\frac{\partial L}{\partial x} = -kx - \alpha\dot{Q}, \quad \frac{\partial L}{\partial \dot{x}} = m\dot{x} \quad (27)$$

Die Dissipationsableitung ist:

$$\frac{\partial \mathcal{D}}{\partial \dot{x}} = c\dot{x} \quad (28)$$

Die resultierende Bewegungsgleichung lautet:

$$m\ddot{x} + c\dot{x} + kx = -\alpha\dot{Q} \quad (29)$$

Für die elektrische Koordinate erhalten wir:

$$\frac{\partial L}{\partial Q} = -\frac{Q}{C} - \alpha\dot{x}, \quad \frac{\partial L}{\partial \dot{Q}} = L\dot{Q} - \alpha x \quad (30)$$

Die zeitliche Ableitung des zweiten Terms ergibt:

$$\frac{d}{dt} \left(\frac{\partial L}{\partial \dot{Q}} \right) = L\ddot{Q} - \alpha\dot{x} \quad (31)$$

Die Dissipationsableitung ist:

$$\frac{\partial \mathcal{D}}{\partial \dot{Q}} = R\dot{Q} \quad (32)$$

Die resultierende elektrische Bewegungsgleichung lautet:

$$L\ddot{Q} + R\dot{Q} + \frac{Q}{C} = \alpha\dot{x} \quad (33)$$

Interpretation der Kopplung

Die beiden Bewegungsgleichungen zeigen die gegenseitige Kopplung zwischen mechanischem und elektrischem Subsystem. Die mechanische Gleichung enthält einen zusätzlichen Term $-\alpha\dot{Q}$ auf der rechten Seite. Dies bedeutet, dass der elektrische Strom eine Kraft auf die Masse ausübt. Diese elektromagnetische Kraft ist proportional zum Strom und wird durch den Kopplungskoeffizienten α bestimmt.

Die elektrische Gleichung enthält einen zusätzlichen Term $\alpha\dot{x}$ auf der rechten Seite. Dies bedeutet, dass die Bewegung der Masse eine elektromotorische Kraft im Schaltkreis induziert. Diese mechanische Rückkopplung erzeugt eine Gegen-EMK, die proportional zur Geschwindigkeit der Masse ist.

Die Kopplung ist reziprok: Die elektrische Dynamik beeinflusst die mechanische Bewegung, und umgekehrt beeinflusst die mechanische Bewegung die elektrische Dynamik. Der Kopplungskoeffizient α tritt in beiden Gleichungen auf und charakterisiert die Stärke dieser wechselseitigen Beeinflussung.

Darstellung als System erster Ordnung

Für die numerische Simulation und die Analyse der Dynamik wandeln wir das System in ein System erster Ordnung um. Wir führen vier Zustandsvariablen ein:

$$y_1 = x, \quad y_2 = \dot{x}, \quad y_3 = Q, \quad y_4 = \dot{Q} \quad (34)$$

Das System erster Ordnung lautet:

$$\begin{aligned} \dot{y}_1 &= y_2 \\ \dot{y}_2 &= -\frac{k}{m}y_1 - \frac{c}{m}y_2 - \frac{\alpha}{m}y_4 \\ \dot{y}_3 &= y_4 \\ \dot{y}_4 &= -\frac{1}{LC}y_3 - \frac{R}{L}y_4 + \frac{\alpha}{L}y_2 \end{aligned} \quad (35)$$

Dies ist ein gekoppeltes System von vier Differentialgleichungen erster Ordnung. Die Kopplung zwischen den mechanischen Variablen (y_1, y_2) und den elektrischen Variablen (y_3, y_4) manifestiert sich in den Termen $-\frac{\alpha}{m}y_4$ in der zweiten Gleichung und $+\frac{\alpha}{L}y_2$ in der vierten Gleichung.

Solche elektromechanischen Systeme finden Anwendung in Lautsprechern, Mikrofonen, elektromagnetischen Aktoren und Sensoren. Die Lagrangesche Formulierung bietet einen systematischen und eleganten Zugang zur Analyse dieser komplexen gekoppelten Systeme.