Konzepte

Lernziele

Die Studierenden sollen…

- … das innere Produkt von Funktionen erklären und Orthogonalität von Basisfunktionen nachweisen können.
- … Fourier-Koeffizienten für periodische Funktionen berechnen und Fourier-Reihen aufstellen können.
- … die Fourier-Transformation auf nicht-periodische Funktionen anwenden und deren Eigenschaften nutzen können.

Einführung: Von Vektoren zu Funktionen

Die mathematische Behandlung von Funktionen lässt sich in bemerkenswerter Weise mit der Vektoralgebra verknüpfen. Eine Funktion kann als ein Objekt aufgefasst werden, das an jedem Punkt eines Intervalls einen Wert besitzt. Diese Eigenschaft verleiht ihr eine Struktur, die an einen Vektor mit unendlich vielen Komponenten erinnert. Während ein Vektor im dreidimensionalen Raum durch drei Zahlen charakterisiert wird, benötigt eine Funktion unendlich viele Werte zu ihrer vollständigen Beschreibung.

Im endlich-dimensionalen Fall lässt sich jeder Vektor als Linearkombination von Basisvektoren darstellen. Ein Vektor $\mathbf{a}$ im dreidimensionalen Raum besitzt die Darstellung $\mathbf{a} = a_1\mathbf{e}_1 + a_2\mathbf{e}_2 + a_3\mathbf{e}_3$, wobei $\mathbf{e}_1$, $\mathbf{e}_2$ und $\mathbf{e}_3$ die Einheitsvektoren bilden. Die Koeffizienten a_1, a_2 und a_3 bestimmen den Vektor eindeutig bezüglich dieser Basis.

Die zentrale Frage dieses Kapitels lautet: Können Funktionen ebenfalls als Basis-Entwicklung geschrieben werden? Die Antwort ist positiv, erfordert jedoch den Übergang zu einem unendlich-dimensionalen Funktionenraum. In diesem Raum übernehmen Funktionen die Rolle der Basisvektoren, und jede Funktion lässt sich als unendliche Summe von Basisfunktionen darstellen.

Skalarprodukt und inneres Produkt

Die Übertragung der Vektoralgebra auf Funktionen beginnt mit der Verallgemeinerung des Skalarprodukts. Für zwei Vektoren $\mathbf{a}$ und $\mathbf{b}$ im $\mathbb{R}^n$ ist das Skalarprodukt definiert als $\mathbf{a} \cdot \mathbf{b} = \sum_i a_i b_i$. Diese Summe über diskrete Komponenten findet ihr kontinuierliches Analogon in einem Integral über die Funktionswerte.

Für zwei Funktionen $f(x)$ und $g(x)$, die auf einem Intervall $[a, b]$ definiert sind, lautet das innere Produkt:

$$\langle f, g \rangle = \int_a^b f^*(x) g(x)\, dx \tag{1}$$

Der Stern bezeichnet die komplexe Konjugation, die für reellwertige Funktionen ohne Bedeutung ist, aber bei komplexen Funktionen die korrekte Verallgemeinerung darstellt. Das innere Produkt misst in gewissem Sinne die Übereinstimmung zweier Funktionen über das gesamte Intervall.

Die Norm einer Funktion ergibt sich analog zur Länge eines Vektors aus dem inneren Produkt mit sich selbst:

$$\|f\| = \sqrt{\langle f, f \rangle} = \sqrt{\int_a^b |f(x)|^2\, dx} \tag{2}$$

Diese Norm quantifiziert die Größe oder Energie einer Funktion. In physikalischen Anwendungen entspricht das Quadrat der Norm häufig einer messbaren Größe wie Energie oder Leistung.

Zwei Funktionen heißen orthogonal, wenn ihr inneres Produkt verschwindet:

$$\langle f, g \rangle = 0$$

Orthogonalität bedeutet geometrisch, dass die Funktionen in keiner Weise miteinander korreliert sind. Diese Eigenschaft erweist sich als fundamental für die Konstruktion von Basisfunktionen.

Basisfunktionen

Eine Basis eines Funktionenraums besteht aus einer Menge von Funktionen $\{\varphi_n(x)\}_{n=1}^{\infty}$, die zwei wesentliche Eigenschaften erfüllen müssen. Erstens müssen die Basisfunktionen linear unabhängig sein, sodass keine Funktion aus den anderen durch Linearkombination konstruiert werden kann. Zweitens muss die Basis vollständig sein, das heißt jede Funktion aus dem betrachteten Funktionenraum muss als unendliche Reihe darstellbar sein:

$$f(x) = \sum_{n=1}^{\infty} a_n \varphi_n(x)$$

Die Koeffizienten a_n charakterisieren die Funktion f bezüglich der gewählten Basis vollständig. Sie spielen die Rolle der Vektorkomponenten in der endlich-dimensionalen Analogie.

Besonders nützlich sind orthogonale Basisfunktionen, die die Bedingung erfüllen:

$$\langle \varphi_m, \varphi_n \rangle = c_n \delta_{mn}$$

Das Kronecker-Delta δ_{mn} ist eins für $m = n$ und null sonst. Die Konstante c_n gibt die Norm der n-ten Basisfunktion an. Orthogonale Basen vereinfachen die Berechnung der Koeffizienten erheblich.

Bei orthogonalen Basisfunktionen lassen sich die Koeffizienten a_n durch ein einfaches inneres Produkt bestimmen. Man multipliziert die Entwicklung $f(x) = \sum_k a_k \varphi_k(x)$ mit $\varphi_n^*(x)$ und integriert über das gesamte Intervall. Aufgrund der Orthogonalität verschwinden alle Terme außer dem n-ten, und man erhält:

$$a_n = \frac{\langle \varphi_n, f \rangle}{\langle \varphi_n, \varphi_n \rangle} = \frac{\langle \varphi_n, f \rangle}{c_n} \tag{3}$$

Diese Formel reduziert die Bestimmung der Koeffizienten auf die Berechnung von Integralen. Die Methode erinnert an die Projektion eines Vektors auf die Basisvektoren.

Für orthogonale Basisfunktionen gilt eine wichtige Identität, die als Parsevalsche Gleichung bekannt ist:

$$\langle f, f \rangle = \sum_{n=1}^{\infty} |a_n|^2 c_n \tag{4}$$

Diese Gleichung besagt, dass die Gesamtenergie der Funktion sich auf die einzelnen Basiskomponenten verteilt. Jeder Term $|a_n|^2 c_n$ repräsentiert den Beitrag der n-ten Basisfunktion zur Gesamtenergie.

Die Fourier-Basis

Die Fourier-Basis ist die wichtigste und am häufigsten verwendete Basis für periodische Funktionen. Sie besteht aus komplexen Exponentialfunktionen der Form:

$$\varphi_n(x) = e^{i2\pi nx/L}, \quad n \in \mathbb{Z} \tag{5}$$

Die Zahl L bezeichnet die Periode der Funktionen. Die Fourier-Basis erstreckt sich über alle ganzen Zahlen, sowohl positive als auch negative, und umfasst daher unendlich viele Funktionen.

Die herausragende Eigenschaft der Fourier-Basis besteht darin, dass sie den Ableitungsoperator diagonalisiert. Die Ableitung einer Basisfunktion ergibt ein Vielfaches derselben Funktion:

$$\frac{d}{dx} e^{i\omega x} = i\omega \cdot e^{i\omega x}$$

Diese Eigenschaft macht die Fourier-Basis besonders geeignet zur Lösung von Differentialgleichungen, da Ableitungen in einfache Multiplikationen mit dem Faktor $i\omega$ übergehen.

Die Fourier-Basisfunktionen sind orthogonal bezüglich des inneren Produkts über eine Periode. Eine direkte Berechnung liefert:

$$\langle \varphi_m, \varphi_n \rangle = L\delta_{mn} \tag{6}$$

Die Normierungskonstante ist $c_n = L$ für alle n. Diese einfache Struktur erleichtert die Berechnung der Fourier-Koeffizienten.

In reeller Form lässt sich die Fourier-Basis auch durch trigonometrische Funktionen ausdrücken. Die Orthogonalitätsrelationen für Kosinus-Funktionen lauten:

$$\int_0^L \cos\left(\frac{2\pi m x}{L}\right) \cos\left(\frac{2\pi n x}{L}\right) dx = \begin{cases} L/2 & m = n \neq 0 \\ L & m = n = 0 \\ 0 & m \neq n \end{cases} \tag{7}$$

Analoge Relationen gelten für Sinus-Funktionen und für gemischte Produkte aus Sinus und Kosinus. Die reelle Form ist anschaulicher, während die komplexe Form rechnerisch eleganter ist.

! Fourier-Basisfunktionen als Eigenfunktionen des Ableitungsoperators

Die besondere Bedeutung der Fourier-Basis für Differentialgleichungen liegt in ihrer Eigenschaft als **Eigenfunktion des Ableitungsoperators**. Für eine komplexe Exponentialfunktion gilt:

$$\frac{d}{dx} e^{i\omega x} = i\omega \cdot e^{i\omega x} \tag{8}$$

Die Ableitung der Funktion ergibt die Funktion selbst multipliziert mit dem konstanten Faktor $i\omega$. Der Ableitungsoperator $\frac{d}{dx}$ wirkt auf die Exponentialfunktion wie eine Multiplikation. Die Exponentialfunktion $e^{i\omega x}$ ist eine **Eigenfunktion** des Ableitungsoperators, und der Faktor $i\omega$ ist der zugehörige **Eigenwert**.

Verbindung zum Exponentialansatz aus Kapitel 2:

Diese Eigenschaft erklärt, warum der Exponentialansatz bei linearen Differentialgleichungen mit konstanten Koeffizienten so erfolgreich ist. In Kapitel 2 haben wir gesehen, dass der Ansatz $y(t) = e^{\lambda t}$ lineare Differentialgleichungen in algebraische Gleichungen überführt. Dies funktioniert genau deshalb, weil Exponentialfunktionen Eigenfunktionen des Ableitungsoperators sind.

Für eine Differentialgleichung der Form:

$$a_n y^{(n)} + a_{n-1} y^{(n-1)} + \cdots + a_1 y' + a_0 y = 0$$

wird durch den Ansatz $y = e^{\lambda t}$ die k-te Ableitung zu $y^{(k)} = \lambda^k e^{\lambda t}$. Die Differentialgleichung verwandelt sich in:

$$(a_n \lambda^n + a_{n-1} \lambda^{n-1} + \cdots + a_1 \lambda + a_0) e^{\lambda t} = 0$$

Das charakteristische Polynom entsteht direkt aus den Eigenwerten des Ableitungsoperators. Die Fourier-Basis verallgemeinert dieses Prinzip auf beliebige Funktionen, indem sie jede Funktion als Überlagerung von Eigenfunktionen darstellt.

Fourier-Reihen

Mit der Orthogonalität der Fourier-Basis kann jede periodische Funktion $f(x)$ mit Periode L als unendliche Reihe dargestellt werden:

$$f(x) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} c_n e^{i 2\pi n x / L} \tag{9}$$

Diese Darstellung heißt Fourier-Reihe der Funktion f. Die Summe erstreckt sich über alle ganzen Zahlen von minus unendlich bis plus unendlich, umfasst also sowohl positive als auch negative Frequenzen.

Die Koeffizienten c_n ergeben sich durch Anwendung der Orthogonalitätsrelation:

$$c_m = \frac{1}{L} \int_0^L f(x) e^{-i 2\pi m x / L} \, dx \tag{10}$$

Jeder Koeffizient wird durch ein einzelnes Integral über eine Periode bestimmt. Der Koeffizient c_m misst den Anteil der Frequenz $m \cdot 2\pi / L$ in der Funktion.

In reeller Form lässt sich die Fourier-Reihe auch als Summe von Kosinus- und Sinus-Funktionen schreiben:

$$f(x) = \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} \left[a_n \cos\left(\frac{2\pi n x}{L}\right) + b_n \sin\left(\frac{2\pi n x}{L}\right) \right] \tag{11}$$

Der Faktor $1/2$ beim ersten Term ist eine konventionelle Normierung. Die reellen Koeffizienten ergeben sich aus:

$$a_n = \frac{2}{L} \int_0^L f(x) \cos\left(\frac{2\pi n x}{L}\right) \, dx \tag{12}$$

$$b_n = \frac{2}{L} \int_0^L f(x) \sin\left(\frac{2\pi n x}{L}\right) dx \tag{13}$$

Die Koeffizienten a_n und b_n hängen mit den komplexen Koeffizienten c_n über einfache Beziehungen zusammen. Die reelle Form ist besonders geeignet für gerade oder ungerade Funktionen, bei denen jeweils eine der beiden Reihen verschwindet.

Fourier-Transformation

Für nicht-periodische Funktionen, die auf der gesamten reellen Achse definiert sind, tritt an die Stelle der Fourier-Reihe die Fourier-Transformation. Der Übergang von der Reihe zur Transformation entspricht dem Grenzübergang von einer diskreten zu einer kontinuierlichen Frequenzvariablen.

Die Fourier-Transformierte einer Funktion $f(x)$ ist definiert als:

$$\hat{f}(k) = \mathcal{F}[f](k) = \int_{-\infty}^{\infty} f(x) e^{-ikx}\, dx \tag{14}$$

Die Variable k bezeichnet die Wellenzahl oder Frequenz. Die Fourier-Transformierte $\hat{f}(k)$ gibt die Amplitude der Frequenzkomponente k in der Funktion $f(x)$ an.

Die inverse Fourier-Transformation rekonstruiert die ursprüngliche Funktion aus ihrer Fourier-Transformierten:

$$f(x) = \mathcal{F}^{-1}[\hat{f}](x) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \hat{f}(k) e^{ikx}\, dk \tag{15}$$

Der Faktor $1/(2\pi)$ stammt aus der Normierung und kann je nach Konvention auch anders verteilt werden. Die Kombination aus Hin- und Rücktransformation liefert die ursprüngliche Funktion zurück, sofern die Integrale existieren.

Die wichtigste Eigenschaft der Fourier-Transformation für Differentialgleichungen ist das Verhalten unter Differentiation. Die Ableitung im Ortsraum entspricht einer einfachen Multiplikation im Fourier-Raum:

$$\mathcal{F}\left[\frac{df}{dx}\right](k) = ik\hat{f}(k) \tag{16}$$

Diese Beziehung verallgemeinert sich auf höhere Ableitungen. Die zweite Ableitung transformiert zu:

$$\mathcal{F}\left[\frac{d^2 f}{dx^2}\right](k) = -k^2 \hat{f}(k)$$

Die Ableitung wird also im Fourier-Raum zur Multiplikation mit einem Faktor, der von der Frequenz abhängt. Diese Eigenschaft macht die Fourier-Transformation zu einem mächtigen Werkzeug zur Lösung linearer Differentialgleichungen mit konstanten Koeffizienten.

Tabelle wichtiger Fourier-Transformationspaare

Die praktische Anwendung der Fourier-Transformation beruht auf der Kenntnis wichtiger Transformationspaare. Die folgende Tabelle fasst die häufigsten Transformationen zusammen.

Tabelle 1: Wichtige Fourier-Transformationspaare. Dabei ist $\Theta(t)$ die Heaviside-Funktion, $\text{rect}(x) = 1$ für $|x| < 1/2$ und 0 sonst, und $\text{sinc}(x) = \sin(x)/x$.

Funktion $f(t)$	Fourier-Transformierte $\hat{f}(\omega)$	Anmerkung
$\delta(t)$	1	Dirac-Impuls
1	$2\pi\delta(\omega)$	Konstante
$e^{i\omega_0 t}$	$2\pi\delta(\omega - \omega_0)$	Komplexe Exponential
$\cos(\omega_0 t)$	$\pi[\delta(\omega - \omega_0) + \delta(\omega + \omega_0)]$	Kosinus
$\sin(\omega_0 t)$	$\frac{\pi}{i}[\delta(\omega - \omega_0) - \delta(\omega + \omega_0)]$	Sinus
$e^{-a\|t\|}$ $(a > 0)$	$\frac{2a}{a^2+\omega^2}$	Zweiseitige Exponential
$e^{-at}\Theta(t)$ $(a > 0)$	$\frac{1}{a+i\omega}$	Kausale Exponential
$\Theta(t)$	$\pi\delta(\omega) + \frac{1}{i\omega}$	Heaviside-Funktion
$\text{rect}(t/T)$	$T \cdot \text{sinc}(\omega T/2)$	Rechteckpuls
$\text{sinc}(\omega_c t)$	$\frac{\pi}{\omega_c}\text{rect}(\omega/(2\omega_c))$	Sinc-Funktion
$e^{-t^2/(2\sigma^2)}$	$\sigma\sqrt{2\pi}e^{-\omega^2\sigma^2/2}$	Gauß-Funktion
$t^n e^{-at}\Theta(t)$ $(a > 0)$	$\frac{n!}{(a+i\omega)^{n+1}}$	Gedämpfte Potenz

Wichtige Rechenregeln

Zusätzlich zu den Transformationspaaren sind folgende Rechenregeln nützlich:

Tabelle 2: Rechenregeln der Fourier-Transformation

Eigenschaft	Zeitbereich	Frequenzbereich
Linearität	$\alpha f(t) + \beta g(t)$	$\alpha \hat{f}(\omega) + \beta \hat{g}(\omega)$
Zeitverschiebung	$f(t - t_0)$	$e^{-i\omega t_0} \hat{f}(\omega)$
Frequenzverschiebung	$e^{i\omega_0 t} f(t)$	$\hat{f}(\omega - \omega_0)$
Zeitskalierung	$f(at)$	$\frac{1}{\|a\|} \hat{f}(\omega/a)$
Differentiation	$\frac{d^n f}{dt^n}$	$(i\omega)^n \hat{f}(\omega)$
Integration	$\int_{-\infty}^{t} f(\tau) d\tau$	$\frac{\hat{f}(\omega)}{i\omega} + \pi \hat{f}(0)\delta(\omega)$
Faltung	$(f * g)(t)$	$\hat{f}(\omega) \cdot \hat{g}(\omega)$
Multiplikation	$f(t) \cdot g(t)$	$\frac{1}{2\pi}(\hat{f} * \hat{g})(\omega)$

! Das Faltungstheorem

Die Faltung zweier Funktionen f und g ist definiert als:

$$(f * g)(x) = \int_{-\infty}^{\infty} f(x - y) g(y) \, dy \tag{17}$$

Für die Fourier-Transformation gilt das Faltungstheorem:
Die Fourier-Transformierte der Faltung ist das Produkt der einzelnen Fourier-Transformierten:

$$\mathcal{F}[f * g](k) = \hat{f}(k) \cdot \hat{g}(k) \tag{18}$$

Kurze Herleitung:

$$\begin{aligned}
\mathcal{F}[f * g](k) &= \int_{-\infty}^{\infty} \left[\int_{-\infty}^{\infty} f(x - y) g(y) \, dy \right] e^{-ikx} \, dx \\
&= \int_{-\infty}^{\infty} g(y) \left[\int_{-\infty}^{\infty} f(x - y) e^{-ikx} \, dx \right] dy \\
&= \int_{-\infty}^{\infty} g(y) e^{-iky} \left[\int_{-\infty}^{\infty} f(z) e^{-ikz} \, dz \right] dy \quad (z = x - y) \\
&= \hat{f}(k) \int_{-\infty}^{\infty} g(y) e^{-iky} \, dy = \hat{f}(k) \cdot \hat{g}(k)
\end{aligned}$$

Für Fourier-Reihen periodischer Funktionen mit Periode L:
Sind f und g periodische Funktionen mit Fourier-Koeffizienten $c_n^{(f)}$ und $c_n^{(g)}$, dann ist die periodische Faltung definiert als:

$$(f \circledast g)(x) = \frac{1}{L} \int_0^L f(x - y) g(y) \, dy \tag{19}$$

Die Fourier-Koeffizienten der Faltung sind:

$$c_n^{(f \circledast g)} = c_n^{(f)} \cdot c_n^{(g)} \tag{20}$$

Diese Eigenschaft findet wichtige Anwendungen in der Signalverarbeitung, bei der Lösung von Integralgleichungen und in der linearen Systemtheorie.

Zusammenfassung

Funktionen lassen sich als Elemente eines unendlich-dimensionalen Vektorraums auffassen. Das innere Produkt zweier Funktionen verallgemeinert das Skalarprodukt von Vektoren durch Integration über die Funktionswerte. Die Norm einer Funktion ergibt sich als Wurzel aus ihrem inneren Produkt mit sich selbst.

Orthogonale Basisfunktionen erlauben die Darstellung jeder Funktion als unendliche Reihe mit einfach zu berechnenden Koeffizienten. Die Koeffizienten ergeben sich durch Projektion der Funktion auf die einzelnen Basisfunktionen mittels des inneren Produkts. Die Parsevalsche Gleichung drückt die Erhaltung der Gesamtenergie bei der Entwicklung nach orthogonalen Basisfunktionen aus.

Die Fourier-Basis aus komplexen Exponentialfunktionen ist besonders wichtig, weil sie den Ableitungsoperator diagonalisiert. Fourier-Reihen stellen periodische Funktionen als Summe von harmonischen Schwingungen dar, während die Fourier-Transformation für nicht-periodische Funktionen eine kontinuierliche Frequenzzerlegung liefert. Die Differentiationseigenschaft der Fourier-Transformation macht sie zu einem unverzichtbaren Werkzeug zur Lösung von Differentialgleichungen.