Konzepte

Lernziele

Die Studierenden sollen…

- … die Green'sche Funktion als Impulsantwort linearer Systeme erläutern und deren Bedeutung erklären können.
- … die Übertragungsfunktion aus den Koeffizienten einer Differentialgleichung berechnen können.
- … lineare Differentialgleichungen mit Fourier-Methoden durch Transformation, algebraische Lösung und Rücktransformation lösen können.

Einführung: Die Strategie der Fourier-Methoden

Die Fourier-Transformation erweist sich als mächtiges Werkzeug zur Lösung linearer Differentialgleichungen mit konstanten Koeffizienten. Die grundlegende Idee beruht auf der bemerkenswerten Eigenschaft, dass die Fourier-Transformation Ableitungen in algebraische Ausdrücke verwandelt. Für die n-te Ableitung einer Funktion gilt:

$$\mathcal{F}\left[\frac{d^n f}{dx^n}\right](k) = (ik)^n \hat{f}(k)$$

Diese Beziehung bedeutet, dass eine Differentialgleichung im Ortsraum zu einer algebraischen Gleichung im Fourier-Raum wird. Statt Ableitungen müssen nur noch Potenzen der Wellenzahl k berechnet werden.

Die Lösungsstrategie für Differentialgleichungen mit Fourier-Methoden folgt einem klaren Schema: Zunächst transformiert man die Differentialgleichung in den Fourier-Raum, wodurch sie zu einer algebraischen Gleichung wird. Dann löst man diese algebraische Gleichung nach der transformierten Funktion auf. Schließlich transformiert man das Ergebnis zurück in den Ortsraum, um die gesuchte Lösung zu erhalten.

Lineare Systeme und ihre Struktur

Ein physikalisches oder technisches System heißt linear, wenn das Superpositionsprinzip gilt. Dies bedeutet, dass die Antwort des Systems auf eine Summe von Anregungen gleich der Summe der einzelnen Antworten ist. Mathematisch ausgedrückt: Wenn f_1 die Antwort auf die Anregung u_1 und f_2 die Antwort auf u_2 ist, dann ist $\alpha f_1 + \beta f_2$ die Antwort auf $\alpha u_1 + \beta u_2$ für beliebige Konstanten α und β.

Ein System heißt zeitinvariant, wenn eine zeitliche Verschiebung der Anregung nur zu einer entsprechenden Verschiebung der Antwort führt, ohne deren Form zu ändern. Wenn $f(t)$ die Antwort auf $u(t)$ ist, dann ist $f(t-\tau)$ die Antwort auf $u(t-\tau)$ für jede Verschiebung τ. Zeitinvariante Systeme besitzen Eigenschaften, die nicht von der absoluten Zeit abhängen, sondern nur von Zeitdifferenzen.

Lineare zeitinvariante Systeme lassen sich durch ihre Impulsantwort vollständig charakterisieren. Diese fundamentale Eigenschaft erlaubt es, die Antwort auf beliebige Anregungen aus der Kenntnis einer einzigen Funktion zu berechnen.

Die Green'sche Funktion

Die Green'sche Funktion $G(t)$ ist die Impulsantwort eines linearen Systems. Sie beschreibt, wie das System auf einen unendlich kurzen, unendlich starken Impuls reagiert, der mathematisch durch die Dirac-Delta-Funktion $\delta(t)$ dargestellt wird. Die Green'sche Funktion erfüllt die Differentialgleichung:

$$a_n \frac{d^n G}{dt^n} + a_{n-1} \frac{d^{n-1} G}{dt^{n-1}} + \cdots + a_0 G = \delta(t) \tag{1}$$

Hier stehen $a_n, a_{n-1}, \dots, a_0$ für die konstanten Koeffizienten der Differentialgleichung. Die rechte Seite ist die Delta-Funktion, die bei $t = 0$ einen Impuls repräsentiert.

Die zentrale Bedeutung der Green'schen Funktion liegt darin, dass die Lösung einer linearen Differentialgleichung für beliebige Anregungen sich durch eine Faltung mit der Green'schen Funktion ausdrücken lässt. Die allgemeine Lösung für eine Anregung $f(t)$ ergibt sich als:

$$x(t) = \int_{-\infty}^{\infty} G(t-t') f(t')\, dt' = (G * f)(t) \tag{2}$$

Diese Faltungsformel zeigt, dass die Antwort des Systems zu einem Zeitpunkt t von den Anregungen zu allen früheren Zeiten t' abhängt, gewichtet mit der Green'schen Funktion $G(t-t')$. Die Green'sche Funktion gibt also an, wie stark eine Anregung zum Zeitpunkt t' noch zum Zeitpunkt t nachwirkt.

Die Reduktion der Lösung auf die Berechnung einer einzigen Funktion macht die Green'sche Funktion zu einem zentralen Konzept. Hat man die Green'sche Funktion einmal bestimmt, so kann man die Lösung für jede beliebige rechte Seite durch eine einfache Faltung berechnen.

Die Übertragungsfunktion

Die Übertragungsfunktion ist die Fourier-Transformierte der Green'schen Funktion. Sie beschreibt das System im Frequenzbereich und gibt an, wie das System auf harmonische Anregungen verschiedener Frequenzen reagiert. Die Definition lautet:

$$H(\omega) = \mathcal{F}[G](\omega) = \int_{-\infty}^{\infty} G(t) e^{-i\omega t} \, dt \tag{3}$$

Die Übertragungsfunktion charakterisiert das Verhalten eines linearen zeitinvarianten Systems vollständig. Sie bestimmt die Amplitude und Phase der stationären Antwort auf eine harmonische Anregung mit Frequenz ω.

Für die allgemeine lineare Differentialgleichung mit konstanten Koeffizienten ergibt sich die Übertragungsfunktion direkt aus den Koeffizienten. Man ersetzt formal jede n-te Ableitung durch $(i\omega)^n$ und erhält:

$$H(\omega) = \frac{1}{a_n (i\omega)^n + a_{n-1} (i\omega)^{n-1} + \cdots + a_1 (i\omega) + a_0} \tag{4}$$

Diese Formel zeigt, dass die Übertragungsfunktion eine rationale Funktion der Frequenz ist. Der Nenner entspricht dem charakteristischen Polynom der Differentialgleichung, wobei die Eigenwerte durch $i\omega$ ersetzt sind.

Die Lösung der Differentialgleichung im Fourier-Raum reduziert sich auf eine einfache Multiplikation mit der Übertragungsfunktion:

$$\hat{x}(\omega) = H(\omega) \cdot \hat{f}(\omega) \tag{5}$$

Diese Gleichung drückt aus, dass jede Frequenzkomponente der Anregung unabhängig von den anderen behandelt werden kann. Die Antwort bei der Frequenz ω ergibt sich durch Multiplikation der Anregung mit dem Wert der Übertragungsfunktion bei dieser Frequenz.

Die praktische Lösungsstrategie besteht aus vier Schritten: Erstens bestimmt man die Übertragungsfunktion $H(\omega)$ aus den Koeffizienten der Differentialgleichung. Zweitens berechnet man die Fourier-Transformierte $\hat{f}(\omega)$ der Anregung. Drittens multipliziert man beide, um $\hat{x}(\omega) = H(\omega) \cdot \hat{f}(\omega)$ zu erhalten. Viertens transformiert man zurück in den Zeitbereich durch $x(t) = \mathcal{F}^{-1}[\hat{x}](t)$.

Die Übertragungsfunktion wirkt als frequenzabhängiger Filter. Sie bestimmt, welche Frequenzkomponenten der Anregung verstärkt und welche abgeschwächt werden. Frequenzen, bei denen $|H(\omega)|$ groß ist, werden stark übertragen, während Frequenzen mit kleinem $|H(\omega)|$ unterdrückt werden.

Antwort auf harmonische Anregung

Die Antwort eines linearen Systems auf eine harmonische Anregung der Form $f(t) = f_0 \cos(\omega t)$ ist besonders einfach zu berechnen. Nach Abklingen transienter Einschwingvorgänge stellt sich eine stationäre Lösung ein, die ebenfalls harmonisch mit derselben Frequenz schwingt:

$$x(t) = \mathrm{Re}\{x_0 e^{-i\omega t}\} \tag{6}$$

Die komplexe Amplitude x_0 hängt mit der Anregungsamplitude über die Übertragungsfunktion zusammen:

$$\frac{x_0}{f_0} = H(\omega)$$

Der Betrag $|x_0| = |H(\omega)| \cdot |f_0|$ gibt die Amplitude der Antwort an, während das Argument $\phi = \arg H(\omega)$ die Phasenverschiebung zwischen Anregung und Antwort bestimmt. Die Übertragungsfunktion fasst also sowohl die Amplitudenverstärkung als auch die Phasenverschiebung in einer einzigen komplexen Zahl zusammen.

Resonanz

Das Phänomen der Resonanz tritt auf, wenn der Betrag der Übertragungsfunktion ein Maximum erreicht. An dieser Stelle reagiert das System besonders empfindlich auf Anregungen. Für einen gedämpften harmonischen Oszillator mit natürlicher Frequenz ω_0 und Dämpfungskoeffizient γ liegt die Frequenz der maximalen Amplitude bei:

$$\omega_{\max} = \sqrt{\omega_0^2 - 2\gamma^2} \tag{7}$$

Diese Amplitudenresonanz liegt etwas unterhalb der natürlichen Frequenz. Der Unterschied wird umso größer, je stärker die Dämpfung ist. Für schwache Dämpfung fällt die Resonanzfrequenz nahezu mit der natürlichen Frequenz zusammen.

Die zeitlich gemittelte Leistung, die vom System aufgenommen wird, erreicht ihr Maximum bei einer anderen Frequenz. Die Leistungsaufnahme ist gegeben durch:

$$\overline{P} = \frac{1}{2}|f_0|^2 \omega \cdot \mathrm{Im}\{H(\omega)\} \tag{8}$$

Das Maximum der Leistungsresonanz liegt exakt bei $\omega = \omega_0$, unabhängig von der Dämpfung. Dies ist eine bemerkenswerte Eigenschaft, die sich aus der speziellen Form der Übertragungsfunktion ergibt.

Die mathematische Erklärung für das Resonanzphänomen findet sich in der Polstruktur der Übertragungsfunktion. Die Übertragungsfunktion des gedämpften Oszillators besitzt Pole bei:

$$\omega = -i\gamma \pm \sqrt{\omega_0^2 - \gamma^2}$$

Diese Pole liegen in der komplexen Frequenzebene. Wenn die reelle Anregungsfrequenz einem Pol nahe kommt, divergiert der Betrag der Übertragungsfunktion. Die Nähe zu einem Pol manifestiert sich als Resonanz im Systemverhalten.

Diskrete Fourier-Transformation in der Praxis

In numerischen Anwendungen arbeitet man nicht mit kontinuierlichen Funktionen, sondern mit endlich vielen Abtastwerten. Die diskrete Fourier-Transformation (DFT) passt das Konzept der Fourier-Transformation an diese Situation an. Für N Abtastwerte $f_j = f(t_j)$ an äquidistanten Zeitpunkten lautet die DFT:

$$\hat{f}_k = \sum_{j=0}^{N-1} f_j e^{-2\pi ijk/N} \tag{9}$$

Der Index k läuft von 0 bis $N-1$ und repräsentiert diskrete Frequenzen. Die DFT liefert also genauso viele Frequenzwerte wie es Zeitwerte gibt.

Die Fast Fourier Transform (FFT) ist ein effizienter Algorithmus zur Berechnung der DFT. Während eine naive Implementierung der DFT $O(N^2)$ Rechenoperationen erfordert, reduziert die FFT diese Zahl auf $O(N \log N)$. Dieser Unterschied ist dramatisch: Für $N = 1024$ benötigt die naive Methode etwa eine Million Operationen, die FFT jedoch nur etwa zehntausend.

Die FFT zählt zu den wichtigsten Algorithmen der numerischen Mathematik. Sie ermöglicht die Echtzeitverarbeitung großer Datenmengen in der Signalverarbeitung, Bildanalyse und zahlreichen anderen Anwendungsgebieten. Die Entwicklung der FFT in den 1960er Jahren hat ganze Forschungsfelder revolutioniert und viele Anwendungen erst praktisch möglich gemacht.

! Das Faltungstheorem für die diskrete Fourier-Transformation

Die diskrete zirkuläre Faltung zweier Folgen $f = (f_0, f_1, \dots, f_{N-1})$ und $g = (g_0, g_1, \dots, g_{N-1})$ ist definiert als:

$$(f \circledast g)_n = \sum_{m=0}^{N-1} f_m \cdot g_{(n-m) \mod N} \tag{10}$$

Faltungstheorem für die DFT:
Die diskrete Fourier-Transformierte der zirkulären Faltung ist das punktweise Produkt der einzelnen DFT-Transformierten:

$$\left(\widehat{f \circledast g}\right)_k = \hat{f}_k \cdot \hat{g}_k \tag{11}$$

Kurze Herleitung:

$$\begin{aligned}
\left(\widehat{f \circledast g}\right)_k &= \sum_{n=0}^{N-1} (f \circledast g)_n e^{-2\pi i n k/N} \\
&= \sum_{n=0}^{N-1} \left[\sum_{m=0}^{N-1} f_m g_{(n-m) \mod N}\right] e^{-2\pi i n k/N} \\
&= \sum_{m=0}^{N-1} f_m \sum_{n=0}^{N-1} g_{(n-m) \mod N} e^{-2\pi i n k/N} \\
&= \sum_{m=0}^{N-1} f_m e^{-2\pi i m k/N} \sum_{j=0}^{N-1} g_j e^{-2\pi i j k/N} \quad (j = (n-m) \mod N) \\
&= \left[\sum_{m=0}^{N-1} f_m e^{-2\pi i m k/N}\right] \left[\sum_{j=0}^{N-1} g_j e^{-2\pi i j k/N}\right] = \hat{f}_k \cdot \hat{g}_k
\end{aligned}$$

Praktische Bedeutung:
Dieses Theorem ist fundamental für die schnelle numerische Berechnung von Faltungen. Statt $O(N^2)$ Operationen für die direkte Faltung benötigt man mit FFT nur $O(N \log N)$ für: 1. FFT von f und g 2. Punktweises Multiplizieren: $\hat{h}_k = \hat{f}_k \cdot \hat{g}_k$ 3. Inverse FFT von $\hat{h}$ Diese Technik wird extensiv in der digitalen Signalverarbeitung, Bildverarbeitung und bei der numerischen Lösung von Differentialgleichungen eingesetzt.

Zusammenfassung

Die Fourier-Methoden transformieren Differentialgleichungen in algebraische Gleichungen, indem Ableitungen im Frequenzraum zu Multiplikationen werden. Die Green'sche Funktion ist die Impulsantwort eines linearen Systems und erlaubt die Berechnung der Lösung für beliebige Anregungen durch Faltung.

Die Übertragungsfunktion, definiert als Fourier-Transformierte der Green'schen Funktion, charakterisiert das Systemverhalten im Frequenzbereich. Sie bestimmt sowohl die Amplitudenverstärkung als auch die Phasenverschiebung für jede Frequenzkomponente. Die Lösung im Fourier-Raum reduziert sich auf eine einfache Multiplikation der transformierten Anregung mit der Übertragungsfunktion.

Resonanz tritt auf, wenn die Anregungsfrequenz nahe an einem Pol der Übertragungsfunktion liegt. An dieser Stelle reagiert das System besonders empfindlich auf Anregungen. Die Fast Fourier Transform ermöglicht die effiziente numerische Berechnung von Fourier-Transformationen und macht die Fourier-Methoden in der Praxis anwendbar.