# Beispiele

## Beispiel: Gedämpfter harmonischer Oszillator

Der gedämpfte harmonische Oszillator dient als fundamentales Beispiel für die Anwendung der Fourier-Methoden zur Lösung von Differentialgleichungen. Die Bewegungsgleichung lautet:

$$m\frac{d^2x}{dt^2} + \beta\frac{dx}{dt} + kx = f(t)$$

Hier bezeichnet $m$ die Masse, $\beta$ den Dämpfungskoeffizienten und $k$ die Federkonstante. Die Funktion $f(t)$ repräsentiert eine externe Kraft, die auf das System wirkt.

Durch Einführung der Dämpfungskonstante $\gamma = \beta/(2m)$ und der natürlichen Frequenz $\omega_0 = \sqrt{k/m}$ nimmt die Gleichung die Form an:

$$\frac{d^2x}{dt^2} + 2\gamma\frac{dx}{dt} + \omega_0^2 x = \frac{f(t)}{m}$$

Diese Normierung vereinfacht die Analyse und macht die physikalische Bedeutung der Parameter deutlicher.

### Übertragungsfunktion

Die Übertragungsfunktion des gedämpften Oszillators ergibt sich durch formales Ersetzen der Ableitungen durch Faktoren $i\omega$:

$$H(\omega) = \frac{1/m}{(\omega_0^2 - \omega^2) + 2i\gamma\omega}$$

Der Betrag dieser komplexen Funktion beschreibt die Amplitudenverstärkung:

$$|H(\omega)| = \frac{1/m}{\sqrt{(\omega_0^2 - \omega^2)^2 + 4\gamma^2\omega^2}}$$

Diese Funktion zeigt ein Maximum in der Nähe von $\omega_0$, dessen genaue Lage und Höhe von der Dämpfung abhängt. Für schwache Dämpfung ist das Maximum scharf und hoch, während starke Dämpfung zu einem breiten, flachen Maximum führt.

### Green'sche Funktion

Für den Fall schwacher Dämpfung, bei dem $\gamma < \omega_0$ gilt, lautet die Green'sche Funktion:

$$G(t) = \frac{1}{m\omega_r} e^{-\gamma t} \sin(\omega_r t) \cdot \Theta(t)$$

Die Resonanzfrequenz $\omega_r = \sqrt{\omega_0^2 - \gamma^2}$ liegt etwas unterhalb der natürlichen Frequenz. Die Heaviside-Sprungfunktion $\Theta(t)$ stellt sicher, dass die Antwort kausal ist und erst nach dem Impuls einsetzt.

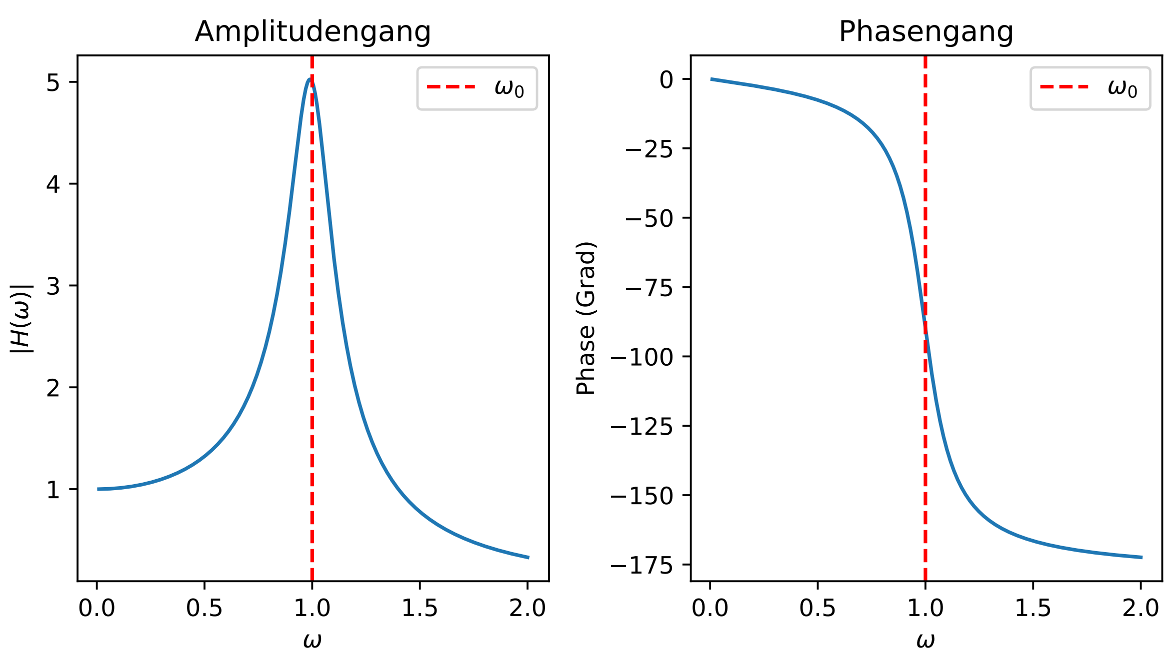
Die Green'sche Funktion zeigt eine gedämpfte Schwingung. Die Amplitude fällt exponentiell mit der Rate $\gamma$ ab, während die Oszillation mit der Frequenz $\omega_r$ erfolgt. Das Produkt dieser beiden Faktoren charakterisiert das transiente Verhalten des Systems nach einer impulsförmigen Anregung.

## Visualisierung: Amplituden- und Phasengang

Die graphische Darstellung der Übertragungsfunktion vermittelt ein anschauliches Bild des Systemverhaltens über den gesamten Frequenzbereich. Der Amplitudengang zeigt die Verstärkung, der Phasengang die zeitliche Verzögerung zwischen Anregung und Antwort.

```python
import numpy as np
import matplotlib.pyplot as plt

# Parameter des gedämpften Oszillators
omega0 = 1.0
gamma = 0.1
m = 1.0

# Übertragungsfunktion
def H(omega):
    return 1.0 / (m * (omega0**2 - omega**2 + 2j*gamma*omega))

# Frequenzbereich
omega = np.linspace(0.01, 2.0, 1000)
```

```
# Amplitudengang
plt.figure(figsize=(7, 4))
plt.subplot(1, 2, 1)
plt.plot(omega, np.abs(H(omega)))
plt.xlabel(r'$\omega$')
plt.ylabel(r'$|H(\omega)|$')
plt.title('Amplitudengang')
plt.axvline(omega0, color='r', linestyle='--', label=r'$\omega_0$')
plt.legend()

# Phasengang
plt.subplot(1, 2, 2)
plt.plot(omega, np.angle(H(omega)) * 180/np.pi)
plt.xlabel(r'$\omega$')
plt.ylabel(r'Phase (Grad)')
plt.title('Phasengang')
plt.axvline(omega0, color='r', linestyle='--', label=r'$\omega_0$')
plt.legend()

plt.tight_layout()
plt.show()
```



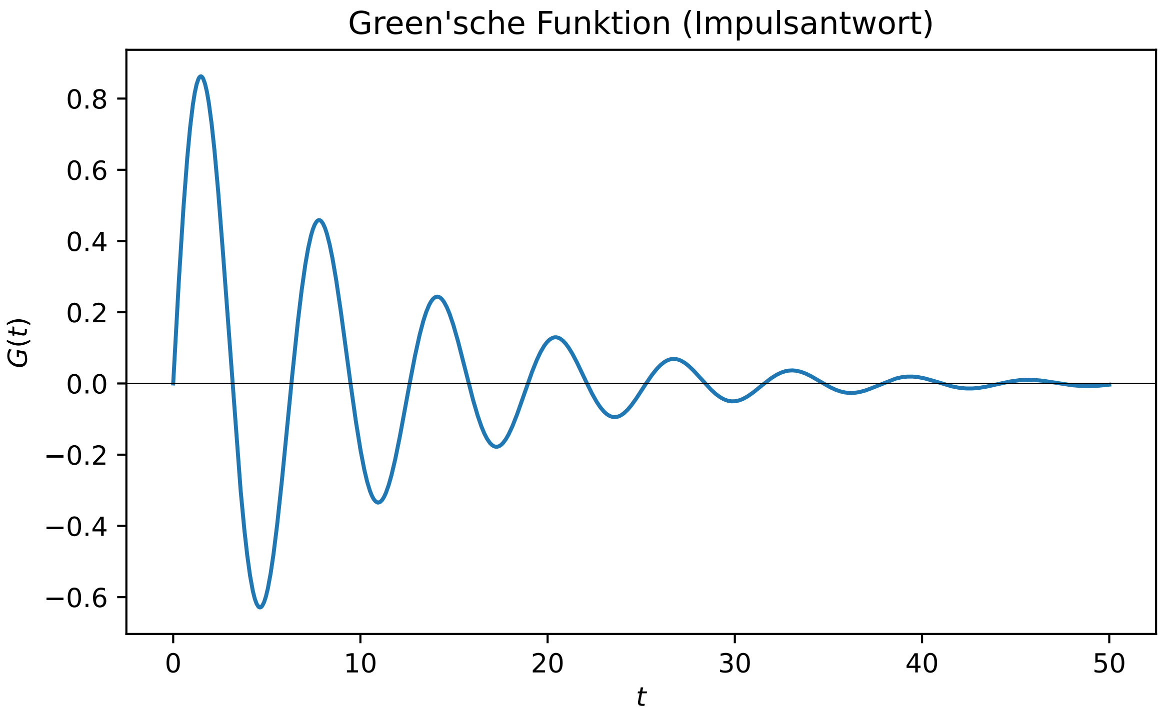

Die Abbildung illustriert das charakteristische Verhalten des gedämpften Oszillators. Der

Amplitudengang zeigt ein ausgeprägtes Maximum bei der Resonanzfrequenz $\omega_0$. Die Phase durchläuft bei dieser Frequenz den Wert $-90°$, was bedeutet, dass Anregung und Antwort um eine Viertelperiode verschoben sind. Bei niedrigen Frequenzen ist die Phase nahe null, das System folgt der Anregung nahezu synchron. Bei hohen Frequenzen nähert sich die Phase $-180°$, die Antwort erfolgt gegenphasig zur Anregung.

## Green'sche Funktion: Impulsantwort

Die zeitliche Entwicklung nach einem Impuls zeigt das fundamentale Verhalten des Systems ohne spezifische Anfangsbedingungen oder kontinuierliche Anregung. Alle transienten Phänomene sind in der Green'schen Funktion enthalten.

```python
# Green'sche Funktion des gedämpften Oszillators
omega_r = np.sqrt(omega0**2 - gamma**2)
t = np.linspace(0, 50, 1000)
G = (1/(m*omega_r)) * np.exp(-gamma*t) * np.sin(omega_r*t) * (t >= 0)

plt.figure(figsize=(7, 4))
plt.plot(t, G)
plt.xlabel(r'$t$')
plt.ylabel(r'$G(t)$')
plt.title("Green'sche Funktion (Impulsantwort)")
plt.axhline(0, color='k', linewidth=0.5)
plt.show()
```




Die Green'sche Funktion zeigt die charakteristische gedämpfte Schwingung als Antwort auf einen Delta-Impuls. Die Amplitude nimmt exponentiell ab, während das System mit seiner Resonanzfrequenz oszilliert. Die Einhüllende der Schwingung fällt mit der Zeitkonstante $1/\gamma$, die die Zeitskala des transienten Verhaltens bestimmt.

## Beispiel: Lösung mit spezifischer Anregung

Für eine Sprunganregung $f(t) = F_0\Theta(t)$, die zum Zeitpunkt $t = 0$ plötzlich einsetzt und dann konstant bleibt, lässt sich die Lösung durch Faltung mit der Green'schen Funktion oder durch Transformation in den Fourier-Raum ermitteln. Die numerische Lösung zeigt das Einschwingverhalten und die Annäherung an den stationären Zustand.

```
from scipy.integrate import solve_ivp

# Beispiel: Sprungantwort
def oscillator_ode(t, y, F0):
    x, v = y
    dxdt = v
    dvdt = -(omega0**2 * x + 2*gamma*v) + F0/m
    return [dxdt, dvdt]
```

```python
# Numerische Lösung
t_span = [0, 50]
y0 = [0, 0]
F0 = 1.0

sol = solve_ivp(lambda t, y: oscillator_ode(t, y, F0), t_span, y0,
                dense_output=True, max_step=0.1)

t_plot = np.linspace(0, 50, 1000)
x_plot = sol.sol(t_plot)[0]

plt.figure(figsize=(7, 4))
plt.plot(t_plot, x_plot)
plt.xlabel('Zeit $t$')
plt.ylabel('Auslenkung $x(t)$')
plt.title('Sprungantwort des gedämpften Oszillators')
plt.axhline(F0/omega0**2/m, color='r', linestyle='--', label='Stationärer Wert')
plt.grid(True, alpha=0.3)
plt.legend()
plt.show()
```

Die Sprungantwort beginnt bei null und schwingt sich allmählich auf den stationären Endwert $F_0/(k/m) = F_0/(m\omega_0^2)$ ein. Das Überschwingen und die Oszillationen während der Einschwingphase hängen von der Dämpfung ab. Der stationäre Wert entspricht dem statischen Gleichgewicht unter der konstanten Kraft $F_0$.

## Beispiel: Resonanzkurve

Die Resonanzkurve zeigt die Abhängigkeit der stationären Amplitude von der Anregungsfrequenz für verschiedene Dämpfungen. Sie visualisiert, wie empfindlich das System auf Anregungen unterschiedlicher Frequenz reagiert.

```python
# Berechnung der Resonanzamplitude für verschiedene Dämpfungen
gammas = [0.05, 0.1, 0.2, 0.5]
omega_range = np.linspace(0.1, 2.0, 500)

plt.figure(figsize=(7, 4))
for gamma in gammas:
    H_values = np.abs(1.0 / (m * (omega0**2 - omega_range**2 + 2j*gamma*omega_range)))
    plt.plot(omega_range, H_values, label=f'  = {gamma}')
```

```
plt.xlabel(r'Anregungsfrequenz $\omega$')
plt.ylabel(r'Amplitudenverstärkung $|H(\omega)|$')
plt.title('Resonanzkurven für verschiedene Dämpfungen')
plt.axvline(omega0, color='k', linestyle=':', alpha=0.5, label=r'$\omega_0$')
plt.legend()
plt.grid(True, alpha=0.3)
plt.show()
```

Die Visualisierung demonstriert den dramatischen Einfluss der Dämpfung auf das Resonanzverhalten. Für kleine Dämpfung tritt eine scharfe Resonanzspitze bei der natürlichen Frequenz $\omega_0$ auf. Das System kann in diesem Fall die Anregungsenergie sehr effizient aufnehmen und erreicht große Amplituden. Für große Dämpfung verschwindet die ausgeprägte Resonanz, die Kurve wird breit und flach. Das System reagiert über einen weiten Frequenzbereich ähnlich, ohne besondere Verstärkung bei einer bestimmten Frequenz.

Die maximale Verstärkung ist umgekehrt proportional zur Dämpfung. Dies erklärt, warum schwach gedämpfte Systeme durch kleine periodische Kräfte zu großen Schwingungen angeregt werden können, während stark gedämpfte Systeme auch bei Resonanz nur moderate Amplituden erreichen. Die Resonanzamplitude $|H(\omega_0)| \approx 1/(2m\gamma\omega_0)$ zeigt diese inverse Abhängigkeit explizit.