Konzepte

Lernziele

Die Studierenden sollen…

- … die Laplace-Transformation definieren und ihre Eigenschaften, insbesondere das Verhalten bei Differentiation, erklären können.
- … die Konzepte von Polen und Nullstellen einer Übertragungsfunktion erklären können.

- … Anfangswertprobleme mittels Laplace-Transformation lösen und dabei die automatische Berücksichtigung von Anfangsbedingungen nutzen können.
- … die Pole einer Übertragungsfunktion berechnen und ihre Bedeutung für das Zeitverhalten interpretieren können.

- … die Stabilität dynamischer Systeme anhand der Pollagen in der komplexen s-Ebene analysieren können.

Einführung: Von Zeit- zu Frequenzbereich

Die Laplace-Transformation ist das Standardwerkzeug zur Lösung von Anfangswertproblemen bei gewöhnlichen Differentialgleichungen. Sie verwandelt Differentialgleichungen in algebraische Gleichungen und integriert dabei die Anfangsbedingungen automatisch in die Lösung. Diese elegante Eigenschaft unterscheidet die Laplace-Transformation von anderen Methoden und macht sie besonders wertvoll für praktische Anwendungen.

Die Laplace-Transformation bietet mehrere entscheidende Vorteile gegenüber anderen Methoden. Die Anfangsbedingungen werden nicht separat behandelt, sondern erscheinen automatisch als Terme in der transformierten Gleichung. Die Kausalität ist natürlich eingebaut, da die Transformation nur über positive Zeiten integriert. Die Konvergenz ist für eine größere Klasse von Funktionen gewährleistet als bei der Fourier-Transformation. Praktische Eingangssignale wie Sprünge und Impulse lassen sich direkt und natürlich behandeln.

Die Laplace-Transformation

Herleitung aus der Fourier-Transformation

Die Laplace-Transformation lässt sich elegant aus der Fourier-Transformation herleiten. Betrachten wir eine Funktion $f(t)$, die für $t < 0$ verschwindet (kausale Funktion). Wir können dies durch Multiplikation mit der Heaviside-Funktion $\Theta(t)$ ausdrücken:

$$f(t) \to f(t)\Theta(t)$$

Für viele Funktionen - wie etwa $f(t) = e^{at}$ mit $a > 0$ - existiert die Fourier-Transformation nicht, da das Integral divergiert. Wir können jedoch die Konvergenz erzwingen, indem wir die Funktion mit einem exponentiellen Dämpfungsfaktor $e^{-\sigma t}$ multiplizieren:

$$g(t) = f(t)\, e^{-\sigma t}\, \Theta(t) \tag{1}$$

Für hinreichend großes σ konvergiert nun die Fourier-Transformation von $g(t)$:

$$\hat{g}(\omega) = \mathcal{F}[f(t)\, e^{-\sigma t}\, \Theta(t)](\omega) = \int_{-\infty}^{\infty} f(t)\, e^{-\sigma t}\, \Theta(t)\, e^{-i\omega t}\, dt = \int_{0}^{\infty} f(t)\, e^{-(\sigma+i\omega)t}\, dt$$

Mit der Substitution $s = \sigma + i\omega$ erhalten wir die **Laplace-Transformation**:

$$\mathcal{L}[f(t)](s) = F(s) = \int_{0}^{\infty} f(t)\, e^{-st}\, dt \tag{2}$$

! Laplace als Fourier mit Dämpfung

Die Laplace-Transformation ist die Fourier-Transformation der mit $e^{-\sigma t}$ gedämpften und durch $\Theta(t)$ auf $t \geq 0$ beschränkten Funktion:

$$F(s) = F(\sigma + i\omega) = \mathcal{F}[f(t)\, e^{-\sigma t}\, \Theta(t)](\omega)$$

Der Realteil σ von s bestimmt die Dämpfung, der Imaginärteil ω die Frequenz.

Die komplexe Frequenzvariable s

Die Variable $s = \sigma + i\omega$ ist eine komplexe Frequenzvariable mit zwei Komponenten:

- **Realteil** σ: Bestimmt die exponentielle Gewichtung $e^{-\sigma t}$. Ein positives σ dämpft wachsende Funktionen und ermöglicht die Konvergenz des Integrals.

- **Imaginärteil** ω: Entspricht der Kreisfrequenz der Fourier-Transformation und erfasst die oszillatorischen Komponenten.

Diese Struktur erklärt, warum die Laplace-Transformation für eine größere Klasse von Funktionen existiert als die Fourier-Transformation: Die exponentielle Dämpfung kann das Wachstum der Funktion kompensieren.

> **i** Konvergenzbereich
>
> Das Laplace-Integral konvergiert nur für bestimmte Werte von s. Der **Konvergenzbereich** (Region of Convergence, ROC) ist die Menge aller s, für die das Integral existiert. Typischerweise hat er die Form $\mathrm{Re}(s) > \sigma_0$, wobei σ_0 von der Funktion $f(t)$ abhängt. Beispiel: Für $f(t) = e^{at}$ gilt:
>
> $$F(s) = \int_0^\infty e^{at} e^{-st} dt = \int_0^\infty e^{-(s-a)t} dt = \frac{1}{s-a}$$
>
> Das Integral konvergiert nur für $\mathrm{Re}(s) > a$, d.h. die Dämpfung σ muss größer sein als die Wachstumsrate a.

Die inverse Laplace-Transformation

Die inverse Laplace-Transformation lässt sich analog aus der inversen Fourier-Transformation herleiten. Wir hatten die gedämpfte Funktion $g(t) = f(t)\, e^{-\sigma t}\, \Theta(t)$ eingeführt, deren Fourier-Transformierte $\hat{g}(\omega) = F(\sigma + i\omega)$ ist.

Die inverse Fourier-Transformation liefert:

$$g(t) = f(t)\, e^{-\sigma t}\, \Theta(t) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} F(\sigma + i\omega)\, e^{i\omega t}\, d\omega$$

Multiplizieren wir beide Seiten mit $e^{\sigma t}$, erhalten wir für $t > 0$:

$$f(t) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} F(\sigma + i\omega)\, e^{(\sigma + i\omega)t}\, d\omega$$

Mit der Substitution $s = \sigma + i\omega$ (also $ds = i\, d\omega$) wird dies zu:

$$f(t) = \frac{1}{2\pi i} \int_{\sigma - i\infty}^{\sigma + i\infty} F(s)\, e^{st}\, ds \tag{3}$$

Dies ist die **Bromwich-Formel** für die inverse Laplace-Transformation.

Geometrische Interpretation

Das Integral erstreckt sich entlang einer vertikalen Linie $\mathrm{Re}(s) = \sigma$ in der komplexen s-Ebene, die parallel zur imaginären Achse verläuft. Der Wert σ muss so gewählt werden, dass die Linie rechts von allen Singularitäten (Polen) von $F(s)$ liegt - also im Konvergenzbereich.

In der praktischen Anwendung verwendet man selten die Bromwich-Formel direkt. Stattdessen arbeitet man mit:

- **Partialbruchzerlegung**: Zerlegung rationaler Funktionen in einfache Brüche
- **Tabellen**: Nachschlagen bekannter Transformationspaare (siehe Tabelle 1)
- **Residuensatz**: Berechnung des Integrals über die Pole von $F(s)$

Laplace-Transformationen wichtiger Funktionen

Die praktische Anwendung der Laplace-Transformation beruht auf der Kenntnis der Transformationspaare wichtiger Funktionen. Die folgenden Tabellen fassen die häufigsten Transformationen und Rechenregeln zusammen.

Tabelle 1: Wichtige Laplace-Transformationspaare. Alle Funktionen sind für $t < 0$ als null definiert (kausale Funktionen).

Funktion $f(t)$ (für $t \geq 0$)	Laplace-Transformierte $F(s)$	Konvergenzbereich
$\delta(t)$	1	$\mathrm{Re}(s) > -\infty$
$\Theta(t)$ (Heaviside)	$\frac{1}{s}$	$\mathrm{Re}(s) > 0$
t	$\frac{1}{s^2}$	$\mathrm{Re}(s) > 0$
t^n	$\frac{n!}{s^{n+1}}$	$\mathrm{Re}(s) > 0$
$e^{\alpha t}$	$\frac{1}{s-\alpha}$	$\mathrm{Re}(s) > \mathrm{Re}(\alpha)$
$t^n e^{\alpha t}$	$\frac{n!}{(s-\alpha)^{n+1}}$	$\mathrm{Re}(s) > \mathrm{Re}(\alpha)$
$\sin(\omega t)$	$\frac{\omega}{s^2+\omega^2}$	$\mathrm{Re}(s) > 0$
$\cos(\omega t)$	$\frac{s}{s^2+\omega^2}$	$\mathrm{Re}(s) > 0$
$e^{\alpha t}\sin(\omega t)$	$\frac{\omega}{(s-\alpha)^2+\omega^2}$	$\mathrm{Re}(s) > \mathrm{Re}(\alpha)$
$e^{\alpha t}\cos(\omega t)$	$\frac{s-\alpha}{(s-\alpha)^2+\omega^2}$	$\mathrm{Re}(s) > \mathrm{Re}(\alpha)$
$\sinh(\omega t)$	$\frac{\omega}{s^2-\omega^2}$	$\mathrm{Re}(s) > \lvert\omega\rvert$
$\cosh(\omega t)$	$\frac{s}{s^2-\omega^2}$	$\mathrm{Re}(s) > \lvert\omega\rvert$
$t\sin(\omega t)$	$\frac{2\omega s}{(s^2+\omega^2)^2}$	$\mathrm{Re}(s) > 0$
$t\cos(\omega t)$	$\frac{s^2-\omega^2}{(s^2+\omega^2)^2}$	$\mathrm{Re}(s) > 0$

Wichtige Eigenschaften der Laplace-Transformation

Die Laplace-Transformation ist linear. Für beliebige Konstanten α und β gilt:

$$\mathcal{L}[\alpha f(t) + \beta g(t)] = \alpha F(s) + \beta G(s)$$

Diese Eigenschaft erlaubt es, komplexe Probleme in einfachere Teilprobleme zu zerlegen.

Der Verschiebungssatz beschreibt den Effekt einer Multiplikation mit einer Exponentialfunktion:

$$\mathcal{L}[e^{\alpha t} f(t)] = F(s - \alpha) \tag{4}$$

Die Transformation der mit $e^{\alpha t}$ multiplizierten Funktion ergibt sich durch Verschiebung des Arguments von s nach $s - \alpha$. Dies ist nützlich zur Behandlung gedämpfter Schwingungen.

Die entscheidende Eigenschaft für die Lösung von Differentialgleichungen betrifft das Verhalten unter Differentiation. Die Laplace-Transformierte der ersten Ableitung lautet:

$$\mathcal{L}\left[\frac{df}{dt}\right] = sF(s) - f(0) \tag{5}$$

Herleitung der Ableitungsformel

Wir berechnen die Laplace-Transformation der Ableitung $f'(t)$ direkt aus der Definition:

$$\mathcal{L}\left[\frac{df}{dt}\right] = \int_0^\infty \frac{df}{dt}\, e^{-st}\, dt$$

Partielle Integration mit $u = e^{-st}$ und $dv = f'(t)\, dt$ liefert:

$$\int_0^\infty f'(t)\, e^{-st}\, dt = \left[f(t)\, e^{-st}\right]_0^\infty - \int_0^\infty f(t) \cdot (-s)\, e^{-st}\, dt$$

Der Randterm ergibt:

$$\left[f(t)\, e^{-st}\right]_0^\infty = \underbrace{\lim_{t\to\infty} f(t)\, e^{-st}}_{=0 \text{ für } \mathrm{Re}(s) > \sigma_0} - f(0) \cdot e^0 = -f(0)$$

wobei wir annehmen, dass $f(t)$ höchstens exponentiell wächst und $\mathrm{Re}(s)$ hinreichend groß ist.
Das verbleibende Integral ist gerade $s \cdot F(s)$:

$$\int_0^\infty f(t) \cdot s\, e^{-st}\, dt = s \int_0^\infty f(t)\, e^{-st}\, dt = s\, F(s)$$

Zusammen ergibt sich:

$$\mathcal{L}[f'(t)] = s\,F(s) - f(0)$$

Physikalische Interpretation: Der Term $-f(0)$ ist der "Anfangswert-Korrekturterm". Er entsteht, weil die Ableitung $f'(t)$ Information über den Anfangszustand enthält, die bei der Integration von $t = 0$ bis ∞ berücksichtigt werden muss.

Für die zweite Ableitung ergibt sich durch zweimalige Anwendung:

$$\mathcal{L}\left[\frac{d^2 f}{dt^2}\right] = s^2 F(s) - sf(0) - f'(0)$$

Die Anfangswerte $f(0)$ und $f'(0)$ erscheinen automatisch in diesen Formeln. Dies ist die Magie der Laplace-Transformation: Im Gegensatz zur Fourier-Transformation, die $\mathcal{F}[f'] = i\omega\hat{f}$ liefert und die Anfangsbedingungen separat behandeln muss, sind bei der Laplace-Transformation die Anfangswerte von selbst dabei.

Die allgemeine Formel für die n-te Ableitung lautet:

$$\mathcal{L}\left[\frac{d^n f}{dt^n}\right] = s^n F(s) - \sum_{k=0}^{n-1} s^{n-1-k} f^{(k)}(0)$$

Diese Summe sammelt alle Anfangswerte bis zur $(n-1)$-ten Ableitung.

Der Faltungssatz verknüpft die Faltung im Zeitbereich mit dem Produkt im Frequenzbereich:

$$\mathcal{L}[f(t) * g(t)] = F(s)G(s) \tag{6}$$

Dies ermöglicht die Behandlung von Integralgleichungen und Systemen mit Gedächtnis.

Der Anfangswertsatz bestimmt den Wert bei $t = 0$ aus dem Verhalten von $F(s)$ für große s:

$$f(0) = \lim_{s\to\infty} sF(s)$$

Der Endwertsatz gibt den asymptotischen Wert für große Zeiten an:

$$\lim_{t\to\infty} f(t) = \lim_{s\to 0} sF(s)$$

Dieser Satz ist besonders nützlich zur Bestimmung des stationären Zustands, ohne die inverse Transformation explizit durchführen zu müssen.

Wichtige Rechenregeln

Tabelle 2: Rechenregeln der Laplace-Transformation

Eigenschaft	Zeitbereich	Laplace-Bereich
Linearität	$\alpha f(t) + \beta g(t)$	$\alpha F(s) + \beta G(s)$
1. Ableitung	$\frac{df}{dt}$	$sF(s) - f(0)$
2. Ableitung	$\frac{d^2f}{dt^2}$	$s^2F(s) - sf(0) - f'(0)$
n-te Ableitung	$\frac{d^nf}{dt^n}$	$s^nF(s) - \sum_{k=0}^{n-1} s^{n-1-k} f^{(k)}(0)$
Integration	$\int_0^t f(\tau)d\tau$	$\frac{F(s)}{s}$
Verschiebung in s	$e^{\alpha t}f(t)$	$F(s-\alpha)$
Zeitverschiebung	$f(t-a)\Theta(t-a)$	$e^{-as}F(s)$
Skalierung	$f(at)$	$\frac{1}{a}F(s/a)$
Faltung	$(f * g)(t)$	$F(s) \cdot G(s)$
Multiplikation mit t	$tf(t)$	$-\frac{dF(s)}{ds}$
Division durch t	$\frac{f(t)}{t}$	$\int_s^\infty F(\sigma)d\sigma$

Die Kombinationen aus Exponential- und trigonometrischen Funktionen (Zeilen 9-10 in Tabelle 1) sind besonders wichtig für die Analyse gedämpfter Schwingungen. Der Konvergenzbereich hängt vom Parameter α ab: Für $\alpha < 0$ (Dämpfung) konvergiert das Integral bereits für $\mathrm{Re}(s) > \alpha < 0$, während für $\alpha > 0$ (Instabilität) $\mathrm{Re}(s) > \alpha$ erforderlich ist.

Lösen von Differentialgleichungen

Die systematische Lösung einer Differentialgleichung mit der Laplace-Transformation folgt einem klaren Rezept. Zunächst transformiert man beide Seiten der Gleichung in den s-Bereich. Dabei verwendet man die Formeln für die Ableitungen: $\mathcal{L}[y'] = sY - y(0)$ und $\mathcal{L}[y''] = s^2Y - sy(0) - y'(0)$. Dann löst man die resultierende algebraische Gleichung nach $Y(s)$ auf. Anschließend zerlegt man $Y(s)$ mittels Partialbruchzerlegung in einfache Terme. Schließlich transformiert man jeden Term mit Hilfe einer Tabelle zurück in den Zeitbereich.

Die Strategie besteht also aus drei Hauptschritten: Transformation in den s-Bereich, algebraische Lösung für $Y(s)$, und Inversion zurück in den Zeitbereich mittels Partialbruchzerlegung oder Tabelle. Die Schwierigkeit liegt meist in der Partialbruchzerlegung und der inversen Transformation, während die Lösung im s-Bereich selbst oft trivial ist.

Übertragungsfunktionen und Systeme

Für ein lineares System mit Eingangssignal $u(t)$ und Ausgangssignal $y(t)$ ist die Übertragungsfunktion definiert als das Verhältnis der Laplace-Transformierten:

$$H(s) = \frac{Y(s)}{U(s)} = \frac{b_m s^m + \cdots + b_0}{a_n s^n + \cdots + a_0} \tag{7}$$

Die Übertragungsfunktion charakterisiert das System vollständig, unabhängig von der speziellen Eingabe. Sie ist eine rationale Funktion, deren Zähler und Nenner Polynome in s sind. Die Koeffizienten dieser Polynome hängen direkt mit den Koeffizienten der zugrunde liegenden Differentialgleichung zusammen.

Die Pole der Übertragungsfunktion, also die Nullstellen des Nenners, sind die kritischen Frequenzen des Systems. Ihre Lage in der komplexen s-Ebene bestimmt die Stabilität und das dynamische Verhalten. Alle Pole in der linken Halbebene mit $\mathrm{Re}(s) < 0$ bedeuten asymptotische Stabilität. Pole auf der imaginären Achse führen zu Grenzstabilität mit anhaltenden Oszillationen. Pole in der rechten Halbebene mit $\mathrm{Re}(s) > 0$ bedeuten Instabilität mit exponentiell wachsenden Lösungen.

Die Stabilität eines Systems lässt sich also auf einen Blick aus dem Pol-Nullstellen-Diagramm ablesen. Ein Pol bei $s = a + ib$ führt zu einem Beitrag proportional zu e^{at} in der Zeitlösung. Für $a < 0$ klingt dieser Beitrag exponentiell ab, das System ist stabil. Für $a = 0$ oszilliert der Beitrag mit konstanter Amplitude, das System ist grenzstabil. Für $a > 0$ wächst der Beitrag exponentiell, das System ist instabil.

Pole und Nullstellen: Schlüssel zum Systemverhalten

Die *Pole* und *Nullstellen* einer Übertragungsfunktion sind fundamentale Größen, die das gesamte dynamische Verhalten eines Systems bestimmen. Das Verständnis dieser Konzepte ist essentiell für die Analyse und den Entwurf dynamischer Systeme.

Definition von Polen und Nullstellen

Für eine rationale Übertragungsfunktion

$$H(s) = \frac{N(s)}{D(s)} = \frac{b_m s^m + b_{m-1} s^{m-1} + \cdots + b_0}{a_n s^n + a_{n-1} s^{n-1} + \cdots + a_0} \tag{8}$$

sind die **Pole** die Werte von s, bei denen der Nenner null wird: $D(s_p) = 0$. An diesen Stellen divergiert $|H(s)| \to \infty$.

Die **Nullstellen** sind die Werte von s, bei denen der Zähler null wird: $N(s_z) = 0$. An diesen Stellen verschwindet $H(s_z) = 0$.

> Faktorisierte Darstellung
>
> Die Übertragungsfunktion lässt sich in faktorisierter Form schreiben:
>
> $$H(s) = K \cdot \frac{(s - z_1)(s - z_2) \cdots (s - z_m)}{(s - p_1)(s - p_2) \cdots (s - p_n)}$$
>
> wobei $z_1, \dots, z_m$ die Nullstellen und $p_1, \dots, p_n$ die Pole sind.

Pole und das Zeitverhalten

Der entscheidende Zusammenhang zwischen Polen und Zeitverhalten ergibt sich aus der Partialbruchzerlegung. Jeder einfache Pol p_i trägt einen Term der Form

$$\frac{A_i}{s - p_i} \quad \xrightarrow{\mathcal{L}^{-1}} \quad A_i e^{p_i t}$$

zur Zeitlösung bei. Der Pol bestimmt also direkt die Zeitkonstante der exponentiellen Komponente.

Tabelle 3: Zusammenhang zwischen Pollage und Zeitverhalten

Pollage	Zeitverhalten	Interpretation
$p = -a$ (reell, negativ)	e^{-at}	Exponentielles Abklingen
$p = a$ (reell, positiv)	e^{at}	Exponentielles Wachstum (instabil)
$p = \pm i\omega$ (rein imaginär)	$\cos(\omega t), \sin(\omega t)$	Ungedämpfte Schwingung
$p = -\sigma \pm i\omega$ (komplex, $\sigma > 0$)	$e^{-\sigma t}\cos(\omega t)$	Gedämpfte Schwingung
$p = \sigma \pm i\omega$ (komplex, $\sigma > 0$)	$e^{\sigma t}\cos(\omega t)$	Aufklingende Schwingung (instabil)

Stabilität und die komplexe s-Ebene

Die Stabilität eines Systems wird vollständig durch die Lage seiner Pole in der komplexen s-Ebene bestimmt:

- **Stabil**: Alle Pole liegen in der *linken Halbebene* ($\mathrm{Re}(s) < 0$). Alle Eigenmoden klingen exponentiell ab.
- **Grenzstabil**: Mindestens ein Pol liegt auf der *imaginären Achse* ($\mathrm{Re}(s) = 0$), alle anderen links davon. Das System zeigt anhaltende Schwingungen.
- **Instabil**: Mindestens ein Pol liegt in der *rechten Halbebene* ($\mathrm{Re}(s) > 0$). Das System zeigt exponentiell wachsende Lösungen.

! Stabilitätskriterium

Ein lineares zeitinvariantes System ist genau dann asymptotisch stabil, wenn **alle Pole** der Übertragungsfunktion negativen Realteil haben:

$$\text{System stabil} \quad \Leftrightarrow \quad \mathrm{Re}(p_i) < 0 \quad \forall i$$

Beispiel: Gedämpfter harmonischer Oszillator

Die Übertragungsfunktion des gedämpften Oszillators mit $m\ddot{y} + c\dot{y} + ky = f(t)$ lautet:

$$H(s) = \frac{1}{ms^2 + cs + k}$$

Die Pole ergeben sich aus der charakteristischen Gleichung $ms^2 + cs + k = 0$:

$$s_{1,2} = \frac{-c \pm \sqrt{c^2 - 4mk}}{2m} = -\zeta\omega_n \pm \omega_n\sqrt{\zeta^2 - 1}$$

mit der natürlichen Frequenz $\omega_n = \sqrt{k/m}$ und dem Dämpfungsgrad $\zeta = c/(2\sqrt{mk})$.

Tabelle 4: Dämpfungsregime des harmonischen Oszillators

Dämpfungsgrad	Diskriminante	Pole	Verhalten
$\zeta > 1$ (überdämpft)	$c^2 > 4mk$	Zwei reelle negative Pole	Kriechende Rückkehr ohne Überschwingen
$\zeta = 1$ (kritisch gedämpft)	$c^2 = 4mk$	Doppelter reeller Pol	Schnellste Rückkehr ohne Überschwingen
$0 < \zeta < 1$ (unterdämpft)	$c^2 < 4mk$	Komplex konjugierte Pole	Gedämpfte Schwingung

Dämpfungsgrad	Diskriminante	Pole	Verhalten
$\zeta = 0$ (ungedämpft)	$c = 0$	Rein imaginäre Pole	Ungedämpfte Schwingung

Resonanz und Polnähe

Das Phänomen der Resonanz hat eine elegante Erklärung durch die Polstruktur. Die Übertragungsfunktion $H(s)$ wird auf der imaginären Achse $s = i\omega$ ausgewertet, um das Frequenzverhalten zu erhalten:

$$H(i\omega) = \frac{1}{m(i\omega)^2 + c(i\omega) + k} = \frac{1}{(k - m\omega^2) + ic\omega}$$

Der Betrag $|H(i\omega)|$ wird groß, wenn der Nenner klein wird - also wenn die reelle Frequenz ω nahe an einem Pol kommt. Je näher ein Pol an der imaginären Achse liegt (kleine Dämpfung), desto ausgeprägter ist die Resonanz.

> **Geometrische Interpretation**
>
> Der Abstand eines Punktes $i\omega$ auf der imaginären Achse zu einem Pol p in der komplexen Ebene bestimmt die Verstärkung bei dieser Frequenz. Die Resonanzfrequenz ist diejenige Frequenz, bei der dieser Abstand minimal wird.

Vergleich: Fourier- und Laplace-Transformation

Die Fourier- und Laplace-Transformation sind komplementäre Werkzeuge, die sich aus der gemeinsamen Idee der Frequenzanalyse ableiten. Der Zusammenhang

$$F(s) = \mathcal{F}[f(t)\, e^{-\sigma t}\, \Theta(t)](\omega), \quad s = \sigma + i\omega$$

zeigt, dass die Laplace-Transformation eine Erweiterung der Fourier-Transformation auf kausale, möglicherweise wachsende Funktionen ist.

Tabelle 5: Vergleich von Fourier- und Laplace-Transformation

Eigenschaft	Fourier-Transformation	Laplace-Transformation
Frequenzvariable	ω (rein reell)	$s = \sigma + i\omega$ (komplex)
Integrationsbereich	$(-\infty, +\infty)$	$[0, +\infty)$
Kausalität	Nicht eingebaut	Natürlich durch $\Theta(t)$

Eigenschaft	Fourier-Transformation	Laplace-Transformation
Anfangsbedingungen	Separat zu behandeln	Automatisch enthalten
Konvergenz	Nur für $f \in L^1$ oder L^2	Erweitert durch Dämpfung $e^{-\sigma t}$
Stabilität	Nicht direkt ablesbar	Aus Pollagen in s-Ebene

Für $\sigma = 0$ (d.h. auf der imaginären Achse $s = i\omega$) stimmen beide Transformationen überein, sofern die Fourier-Transformation existiert. Die Laplace-Transformation erweitert diesen Bereich durch den Dämpfungsfaktor auf Funktionen wie e^{at}, deren Fourier-Transformation nicht existiert.

Wahl der Methode: Die Fourier-Transformation eignet sich für spektrale Analyse, periodische Anregungen und stationäre Prozesse. Die Laplace-Transformation ist ideal für Anfangswertprobleme, transiente Vorgänge, Stabilitätsanalyse und Regelungstechnik.

Zusammenfassung

Die Laplace-Transformation konvertiert Differentialgleichungen in algebraische Gleichungen und berücksichtigt dabei die Anfangsbedingungen automatisch. Die Transformation einer Ableitung führt zu einem Polynom in s mit zusätzlichen Termen, die die Anfangswerte enthalten. Diese Eigenschaft macht die Laplace-Transformation zum idealen Werkzeug für Anfangswertprobleme.

Die Übertragungsfunktion $H(s) = Y(s)/U(s)$ charakterisiert ein lineares System vollständig. Sie bestimmt sowohl das Amplitudenverhalten als auch die Phasenverschiebung für jede Frequenz.

Pole und Stabilität: Die Pole der Übertragungsfunktion - die Nullstellen des Nenners - sind der Schlüssel zum Verständnis des Systemverhaltens:

- Jeder Pol p_i erzeugt einen Beitrag $\propto e^{p_i t}$ in der Zeitlösung
- Die Pollage bestimmt das Zeitverhalten: reelle Pole $\to$ Exponentialfunktionen, komplex konjugierte Pole $\to$ gedämpfte Schwingungen
- **Stabilitätskriterium**: Ein System ist stabil $\Leftrightarrow$ alle Pole haben negativen Realteil (liegen in der linken Halbebene)
- Resonanz tritt auf, wenn die Anregungsfrequenz nahe an einem Pol kommt

Die Partialbruchzerlegung ist das zentrale Werkzeug zur inversen Transformation. Sie zerlegt eine rationale Funktion in einfache Brüche, deren inverse Transformationen bekannt sind. Die systematische Anwendung dieser Methode erlaubt die Lösung nahezu aller linearen Differentialgleichungen mit konstanten Koeffizienten.

Fourier- und Laplace-Transformation sind komplementär. Die Fourier-Transformation eignet sich für spektrale Analyse und periodische Anregungen. Die Laplace-Transformation ist ideal für Anfangswertprobleme, Stabilitätsanalyse und Regelungstechnik. Die Wahl der Methode richtet sich nach der Art des Problems: Anfangswertprobleme und Stabilitätsfragen bevorzugen die Laplace-Transformation, während periodische Anregungen und Frequenzanalyse mit der Fourier-Transformation besser behandelt werden.