

Beispiele

Beispiel: Differentialgleichung erster Ordnung mit Anfangsbedingung

Die lineare Differentialgleichung erster Ordnung

$$\frac{dy}{dt} + ay = g(t), \quad y(0) = y_0 \quad (1)$$

lässt sich mit der Laplace-Transformation systematisch lösen. Die Transformation beider Seiten ergibt:

$$sY(s) - y_0 + aY(s) = G(s)$$

Die Anfangsbedingung y_0 erscheint automatisch im zweiten Term. Nach Umstellung erhält man:

$$(s + a)Y(s) = G(s) + y_0$$

Die Auflösung nach $Y(s)$ liefert:

$$Y(s) = \frac{G(s) + y_0}{s + a}$$

Diese Form lässt sich in zwei Teile zerlegen. Der erste Teil $G(s)/(s + a)$ entspricht der partikulären Lösung, die von der Anregung $g(t)$ abhängt. Der zweite Teil $y_0/(s + a)$ ist die homogene Lösung, die die Anfangsbedingung erfüllt.

Die Rücktransformation ergibt:

$$y(t) = \mathcal{L}^{-1} \left[\frac{G(s)}{s + a} \right] (t) + y_0 e^{-at}$$

Der zweite Term ist die Eigenlösung der homogenen Gleichung, die exponentiell mit der Rate a abklingt. Die vollständige Lösung setzt sich also aus dem transienten Anteil und der getriebenen Antwort zusammen.

Beispiel: Gedämpfter harmonischer Oszillator

Der gedämpfte harmonische Oszillator mit der Gleichung

$$m \frac{d^2 y}{dt^2} + c \frac{dy}{dt} + ky = f(t), \quad y(0) = 0, \quad y'(0) = 0 \quad (2)$$

demonstriert die Behandlung von Differentialgleichungen zweiter Ordnung.

Die Laplace-Transformation ergibt:

$$ms^2 Y(s) + csY(s) + kY(s) = F(s)$$

Die Anfangsbedingungen sind beide null, sodass keine zusätzlichen Terme auftreten. Die Umstellung liefert:

$$(ms^2 + cs + k)Y(s) = F(s)$$

Die Übertragungsfunktion ist:

$$Y(s) = \frac{F(s)}{ms^2 + cs + k} = \frac{F(s)}{m(s^2 + 2\zeta\omega_n s + \omega_n^2)}$$

Hier bezeichnet $\omega_n = \sqrt{k/m}$ die natürliche Frequenz und $\zeta = c/(2\sqrt{mk})$ das Dämpfungsverhältnis. Diese Normierung macht die physikalischen Parameter explizit und erleichtert die Interpretation.

Die Übertragungsfunktion des Systems lautet:

$$H(s) = \frac{1}{ms^2 + cs + k}$$

Sie charakterisiert das System vollständig und bestimmt die Antwort auf jede beliebige Anregung durch einfache Multiplikation im Laplace-Raum.

Partialbruchzerlegung und Inversion

Die Partialbruchzerlegung ist das zentrale Werkzeug zur inversen Transformation rationaler Funktionen. Als Beispiel betrachten wir:

$$Y(s) = \frac{1}{(s+1)(s+2)}$$

Die Zerlegung in Partialbrüche lautet:

$$\frac{1}{(s+1)(s+2)} = \frac{A}{s+1} + \frac{B}{s+2}$$

Zur Bestimmung der Koeffizienten multipliziert man mit dem gemeinsamen Nenner:

$$1 = A(s + 2) + B(s + 1)$$

Das Einsetzen von $s = -1$ ergibt $1 = A \cdot 1$, also $A = 1$. Das Einsetzen von $s = -2$ liefert $1 = B \cdot (-1)$, somit $B = -1$.

Die Partialbruchzerlegung lautet daher:

$$Y(s) = \frac{1}{s + 1} - \frac{1}{s + 2}$$

Die inverse Transformation jeden Terms ist in Tabellen zu finden. Man erhält:

$$y(t) = e^{-t} - e^{-2t}$$

Diese Lösung zeigt zwei exponentielle Terme mit unterschiedlichen Zeitkonstanten. Der erste Term fällt langsamer ab als der zweite, sodass für große Zeiten der erste Term dominiert.

Beispiel: RLC-Schaltkreis

Der elektrische RLC-Schaltkreis mit Induktivität L , Widerstand R und Kapazität C wird durch die Differentialgleichung beschrieben:

$$LC \frac{d^2 v_C}{dt^2} + RC \frac{dv_C}{dt} + v_C = v_{in}$$

Die Variable v_C bezeichnet die Spannung am Kondensator, v_{in} die Eingangsspannung. Die Übertragungsfunktion ergibt sich als:

$$H(s) = \frac{V_C(s)}{V_{in}(s)} = \frac{1}{LCs^2 + RCs + 1}$$

Die Pole der Übertragungsfunktion sind die Nullstellen des Nenners:

$$s = \frac{-RC \pm \sqrt{(RC)^2 - 4LC}}{2LC}$$

Die Natur dieser Pole hängt vom Diskriminanten $(RC)^2 - 4LC$ ab. Für $R^2C > 4L$ ist der Diskriminant positiv, und es existieren zwei reelle negative Pole. Das System ist überdämpft und zeigt ein langsames exponentielles Abklingen ohne Oszillation. Für $R^2C = 4L$ verschmelzen die Pole zu einem doppelten reellen Pol. Das System ist kritisch gedämpft und erreicht den stationären Zustand am schnellsten ohne Überschwingen. Für $R^2C < 4L$ ist der Diskriminant

negativ, die Pole sind komplex konjugiert. Das System ist unterdämpft und zeigt gedämpfte Oszillationen.

Die drei Dämpfungsregime unterscheiden sich grundlegend in ihrem zeitlichen Verhalten. Das überdämpfte System reagiert träge, das kritisch gedämpfte erreicht optimal schnell den stationären Zustand, und das unterdämpfte schwingt mit allmählich abnehmender Amplitude.

Sprungfunktion (Sprungantwort)

Die Sprungantwort charakterisiert das Verhalten eines Systems auf eine plötzlich einsetzende konstante Anregung. Für die Heaviside-Funktion $u(t)$ mit Transformierter $U(s) = 1/s$ ergibt sich:

$$Y(s) = H(s) \cdot \frac{1}{s}$$

Für den gedämpften Oszillator lautet die Sprungantwort im Laplace-Raum:

$$Y(s) = \frac{1}{s(ms^2 + cs + k)}$$

Die inverse Transformation erfordert eine Partialbruchzerlegung. Der stationäre Endwert lässt sich jedoch direkt mit dem Endwertsatz bestimmen:

$$y_\infty = \lim_{s \rightarrow 0} sY(s) = \frac{1}{k}$$

Dieser Wert entspricht dem statischen Gleichgewicht unter einer konstanten Einheitskraft. Der Transient zwischen dem Anfangszustand und dem stationären Wert hängt von der Dämpfung ab.

Python-Implementierung

Die numerische Berechnung und Visualisierung von Systemantworten lässt sich effizient mit Python durchführen. Die Bibliothek `scipy.signal` stellt Funktionen zur Arbeit mit Übertragungsfunktionen bereit.

```
import numpy as np
import matplotlib.pyplot as plt
from scipy import signal

# Beispiel: Übertragungsfunktion eines gedämpften Oszillators
# H(s) = 1 / (m*s^2 + c*s + k)
```

```

m = 1.0
c = 0.5
k = 1.0

# Koeffizienten des Nenners
num = [1/m] # Zähler
den = [1, c/m, k/m] # Nenner: s^2 + (c/m)*s + k/m

# Transfer-Funktion erstellen
sys = signal.TransferFunction(num, den)

# Sprungantwort berechnen
t, y = signal.step(sys)

plt.figure(figsize=(7, 4))

# Sprungantwort
plt.subplot(1, 2, 1)
plt.plot(t, y)
plt.xlabel('Zeit [s]')
plt.ylabel('Amplitude')
plt.title('Sprungantwort')
plt.grid(True, alpha=0.3)

# Bode-Diagramm
w, mag, phase = signal.bode(sys)

plt.subplot(1, 2, 2)
plt.semilogx(w, mag)
plt.xlabel('Frequenz [rad/s]')
plt.ylabel('Magnititude [dB]')
plt.title('Bode-Diagramm (Amplitudengang)')
plt.grid(True, alpha=0.3)

plt.tight_layout()
plt.show()

```

Die Sprungantwort zeigt das zeitliche Verhalten, während das Bode-Diagramm die Frequenzantwort darstellt. Die Amplitude in Dezibel erlaubt die Darstellung über mehrere Größenordnungen. Das Maximum im Bode-Diagramm entspricht der Resonanzfrequenz.

Pol-Nullstellen-Diagramm

Die graphische Darstellung der Pole und Nullstellen in der komplexen Ebene gibt unmittelbare Auskunft über die Stabilität und das dynamische Verhalten des Systems.

```
# Pol-Nullstellen-Diagramm visualisieren
poles = np.roots(den)
zeros = np.roots(num)

plt.figure(figsize=(7, 4))
plt.plot(np.real(poles), np.imag(poles), 'rx', markersize=15, label='Pole')
if len(zeros) > 0:
    plt.plot(np.real(zeros), np.imag(zeros), 'go', markersize=15, label='Nullstellen')

plt.axhline(0, color='k', linewidth=0.5)
plt.axvline(0, color='k', linewidth=0.5)
plt.xlabel('Real')
plt.ylabel('Imaginär')
plt.title('Pol-Nullstellen-Diagramm')
plt.grid(True, alpha=0.3)
plt.legend()
plt.axis('equal')

# Stabilitätsbereich markieren
ax = plt.gca()
ax.axvspan(-10, 0, alpha=0.1, color='green', label='Stabil')
ax.axvspan(0, 10, alpha=0.1, color='red', label='Instabil')

plt.show()
```

Die Visualisierung zeigt die Pole als rote Kreuze und die Nullstellen als grüne Kreise. Der grün hinterlegte Bereich links der imaginären Achse markiert den Stabilitätsbereich. Pole in diesem Bereich führen zu abklingenden Beiträgen in der Zeitantwort. Der rot hinterlegte Bereich rechts der imaginären Achse ist der Instabilitätsbereich, in dem Pole zu exponentiell wachsenden Lösungen führen.

Die Lage der Pole bestimmt das qualitative Verhalten vollständig. Reelle Pole entsprechen rein exponentiellen Beiträgen, während komplex konjugierte Pole gedämpfte Oszillationen erzeugen. Die Entfernung eines Pols von der imaginären Achse bestimmt die Zeitkonstante des zugehörigen Modus. Je weiter links ein Pol liegt, desto schneller klingt der entsprechende Beitrag ab.

Diese Beispiele demonstrieren die praktische Anwendung der Laplace-Transformation in der Regelungstechnik und Systemanalyse. Die Methode erlaubt sowohl die analytische Behandlung einfacher Systeme als auch die numerische Analyse komplexerer Probleme. Die graphischen Darstellungen im Zeit- und Frequenzbereich sowie das Pol-Nullstellen-Diagramm vermitteln komplementäre Einsichten in das Systemverhalten.